

Calcul matriciel

Matrices

→ Définition

Soit m et n deux entiers naturels non nuls.

On appelle « matrice de dimension $m \times n$ » tout tableau de nombres réels comportant m lignes et n colonnes.

Traditionnellement, on utilise une majuscule d'imprimerie pour désigner une matrice donnée.

→ Exemples et notations

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 3 & \pi^2 & 12 \\ \pi & -11,5 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

A est une matrice de dimension 3×3 puisqu'elle comporte 3 lignes et 3 colonnes.

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 17,3 & -8 \\ -8 & 15,2 & 35 & -1,58 \end{pmatrix}$$

B est une matrice de dimension 2×4 puisqu'elle comporte 2 lignes et 4 colonnes.

On peut appeler « termes » les éléments d'une matrice.

Si A est une matrice de dimension $m \times n$, l'élément situé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ième colonne sera noté : a_{ij} .

On peut noter une telle matrice de la façon suivante :

$$A = [a_{ij}], \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

L'élément b_{13} de la matrice B ci-dessus vaut 17,3 et l'élément b_{22} vaut 15,2.

→ Autres définitions

Si $n = m$ (le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes), on dit que l'on a affaire à une « matrice carrée d'ordre n ».

Ainsi, la matrice A ci-dessus est une matrice carrée d'ordre 3.

Si A est une matrice carrée d'ordre n , on appelle « éléments diagonal » de A tout élément a_{ii} .

Les éléments diagonaux de la matrice A ci-dessus sont donc :

$$a_{11} = -2, \quad a_{22} = \pi^2, \quad a_{33} = 7$$

On appelle « matrice unité d'ordre n » la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous les autres éléments sont nuls.

Cette matrice est notée : I_n .

A titre d'exemple, la matrice unité I_4 s'écrit :

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On appelle « matrice nulle » de dimension $m \times n$ la matrice comportant m lignes, n colonnes et dont tous les éléments sont nuls.

A titre d'exemple, la matrice nulle de dimension 3×2 s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Toute matrice de dimension $1 \times n$ (une seule ligne) est appelée « vecteur ligne de dimension n ».

Toute matrice de dimension $m \times 1$ (une seule colonne) est appelée « vecteur colonne de dimension n ».

$C = \left(-56 \quad \frac{1}{2} \quad 34,672 \quad \ln 17 \right)$ est un vecteur ligne de dimension 4.

$D = \begin{pmatrix} 222 \\ -\pi + 3 \\ 12,78 \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne de dimension 3.

Soit A et B deux matrices de dimension $m \times n$.

On dira que « les matrices A et B sont égales » et on écrira « $A = B$ » si pour tout i dans $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ et tout j dans $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, on a l'égalité : $a_{ij} = b_{ij}$.

Opérations sur les matrices

→ Multiplication par un réel

Soit A une matrice de dimension $m \times n$ et k un réel quelconque.

On définit la matrice B produit de la matrice A par le réel k , que l'on note $B = kA$, par :

pour tout i dans $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ et tout j dans $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

$$b_{ij} = k \times a_{ij}$$

Si $k = 0$, on obtient la matrice nulle de dimension $m \times n$.

A titre d'exemple, on peut multiplier la matrice A ci-dessus par 3 et on obtient une matrice que nous notons E :

$$E = 3 \times A = \begin{pmatrix} -6 & 15 & 6 \\ 9 & 3\pi^2 & 36 \\ 3\pi & -34,5 & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

→ Addition de deux matrices

Soit A et B deux matrices de même dimension $m \times n$.

On définit la matrice C somme de la matrice A et de la matrice B, que l'on note $C = A + B$, par :

pour tout i dans $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ et tout j dans $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

A titre d'exemple, considérons les deux matrices A et B suivantes de dimension 3×4 :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 11 & 4 \\ 3 & 0 & 8 & -22 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 7 & 23 & 0 & -15 \\ 3 & 11 & -11 & 2 \\ 5 & 56 & 42 & 22 \end{pmatrix}$$

La matrice C, somme des matrices A et B s'écrit alors :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 28 & 0 & -13 \\ 3 & 4 & 0 & 6 \\ 8 & 56 & 50 & 0 \end{pmatrix}$$

→ Multiplication de deux matrices

Soit A et B deux matrices de dimensions respectives $m \times n$ et $n \times p$ (le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B).

On peut, dans ces conditions, définir la matrice C, produit de la matrice A et de la matrice B, que l'on note : $C = A \times B$ ou $C = AB$, par :

pour tout i dans $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ et tout j dans $\{1, 2, 3, \dots, p\}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

Note : la matrice C est de dimension $m \times p$

Illustrons la définition précédente en effectuant le produit des deux matrices ci-dessous de dimensions respectives 4×3 et 3×5 :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & 11 \\ -4 & -6 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 & -6 & -1 \\ 10 & 7 & -4 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 12 & -13 & 2 \end{pmatrix}$$

Classiquement, on dispose les matrices comme suit :

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 & -6 & -1 \\ 10 & 7 & -4 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 12 & -13 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & 11 \\ -4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

On calcule chaque élément de la matrice produit en procédant comme indiqué dans l'exemple ci-dessous.

Soit à calculer l'élément c_{34} de la matrice produit.

- On considère la 3^{ème} ligne de la matrice A (elle contient 3 éléments) et la 4^{ème} colonne de la matrice B (elle contient également 3 éléments).
- On multiplie le premier élément de la 3^{ème} ligne de la matrice A par le premier élément de la 4^{ème} colonne de la matrice B, soit : $-2 \times -6 = 12$;
- On ajoute au résultat précédent le produit du 2^{ème} élément de la 3^{ème} ligne de la matrice A et du 2^{ème} élément de la 4^{ème} colonne de la matrice B, soit : $12 + 2 \times 8 = 12 + 16 = 28$;
- On ajoute enfin au résultat précédent le produit du 3^{ème} élément de la 3^{ème} ligne de la matrice A et du 3^{ème} élément de la 4^{ème} colonne de la matrice B, soit : $28 + 11 \times (-13) = 28 - 143 = -115$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & 11 \\ -4 & -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 & -6 & -1 \\ 10 & 7 & -4 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 12 & -13 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalemment : $c_{34} = (-2) \times (-6) + 8 \times 2 + 11 \times (-13) = a_{31}b_{14} + a_{32}b_{24} + a_{33}b_{34}$

Tous calculs faits, on obtient :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & 11 \\ -4 & -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 & -6 & -1 \\ 10 & 7 & -4 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 12 & -13 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 33 & -44 & 49 & 1 \\ 30 & 53 & -16 & -22 & 7 \\ 128 & -42 & 100 & -115 & 48 \\ -24 & -118 & 108 & -79 & 0 \end{pmatrix}$$

On écrit finalement :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & 11 \\ -4 & -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 & -6 & -1 \\ 10 & 7 & -4 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 12 & -13 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 33 & -44 & 49 & 1 \\ 30 & 53 & -16 & -22 & 7 \\ 128 & -42 & 100 & -115 & 48 \\ -24 & -118 & 108 & -79 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} 10 & 33 & -44 & 49 & 1 \\ 30 & 53 & -16 & -22 & 7 \\ 128 & -42 & 100 & -115 & 48 \\ -24 & -118 & 108 & -79 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarques importantes :

1. Toujours garder présent à l'esprit que l'on ne peut multiplier une matrice A par une matrice B que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B ;
2. En règle générale, lorsque le produit, $A \times B$, de deux matrices existe, le produit $B \times A$ n'existe pas !
3. Lorsque les produits $A \times B$ et $B \times A$ existent, il n'y a aucune raison pour qu'ils soient égaux.