Eléments du langage ensembliste

→ Cardinal d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini (c'est à dire comportant un nombre fini d'éléments).
On appelle « cardinal de E », noté **card E**, le nombre d'éléments de l'ensemble E.

Par exemple, avec $\mathrm{E}=\{1;4;12;34\}$, on a $\operatorname{card} \mathrm{E}=4$.

→ Parties d'un ensemble

Ensembles des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble.
On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties (encore appelées « sous-ensembles ») de E.

A titre d'exemple, considérons à nouveau l'ensemble $\mathrm{E}=\{1;4;12;34\}$.
Les parties de E sont : $\varnothing$, $\{1\}$, $\{4\}$, $\{12\}$, $\{34\}$, $\{1;4\}$, $\{1;12\}$, $\{1;34\}$, $\{4;12\}$, $\{4;34\}$, $\{12;34\}$, $\{1;4;12\}$, $\{1;4;34\}$, $\{1;12;34\}$, $\{4;12;34\}$ et $\{1;4;12;34\}$.
On a donc ici :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathrm{E})=\{&\varnothing;\{1\};\{4\};\{12\};\{34\};\{1;4\};\{1;12\};\{1;34\};\{4;12\};\{4;34\};\{12;34\};\\&\{1;4;12\};\{1;4;34\};\{1;12;34\};\{4;12;34\};\{1;4;12;34\}\}\end{aligned}$$

Note (hors programme) : si E est un ensemble fini tel que $\operatorname{card} \mathrm{E}=n$ alors : $\operatorname{card} \mathcal{P}(E)=2^n$
(on vérifiera, dans l'exemple fourni ci-dessus, que $\mathcal{P}(E)$ comporte bien $2^4=16$ éléments)

Complémentaire d'une partie d'un ensemble

Soit E un ensemble et A une partie de E.
On appelle « complémentaire de A dans E », noté $\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}$ ou $\overline{\mathrm{A}}$, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

Considérons à nouveau l'ensemble $E=\{1;4;12;34\}$.
Soit $\mathrm{A}=\{4;34\}$. On a alors : $\overline{\mathrm{A}}=\{1;12\}$.
Soit $\mathrm{B}=\{1;34\}$. On a alors : $\overline{\mathrm{B}}=\{4;12\}$.

Citons les deux cas particuliers, valables quel que soit l'ensemble E : $\overline{\varnothing}=\mathrm{E}$ et $\overline{\mathrm{E}}=\varnothing$.

Opérations sur les parties d'un ensemble

Dans ce qui suit, E est un ensemble et A et B sont deux parties de E.

- **Intersection**

On appelle « intersection de A et B », notée $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et à B.

Avec les sous-ensembles A et B définis plus haut, on a : $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{34\}$

- **Réunion**

On appelle « réunion de A et B », notée $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou à B.

Avec les sous-ensembles A et B définis plus haut, on a : $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1; 4; 34\}$

→ Produit cartésien

- **Cas de deux ensembles**

Soit E et F deux ensembles.
L'ensemble des couples $(x; y)$ où x appartient à E et y appartient à F est appelé « produit cartésien de E et F ». On le note $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ (que l'on peut lire « E croix F »).

A titre d'exemple considérons les ensembles : $\mathrm{E} = \{a; b; d\}$ et $\mathrm{F} = \{1; 2\}$.
On a : $\mathrm{E} \times \mathrm{F} = \{(a;1); (a;2); (b;1); (b;2); (d;1); (d;2)\}$

Notes :

1. Si $\mathrm{F} = \mathrm{E}$ alors $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ peut être noté E^2 ;
2. Si $\mathrm{F} \neq \mathrm{E}$ alors $\mathrm{E} \times \mathrm{F} \neq \mathrm{F} \times \mathrm{E}$.

- **Cas de *n* ensembles**

Soit E_1, E_2, …, E_n n ensembles.
L'ensemble des n-uplets $(x_1; x_2; x_3; ...; x_n)$ où x_1 appartient à E_1, x_2 appartient à E_2, …, x_n appartient à E_n est appelé « produit cartésien de E_1, E_2, …, E_n ».
On le note : $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \mathrm{E}_3 \times ... \times \mathrm{E}_n$ ou $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i$

- **Cardinal d'un produit cartésien**

Soit E_1, E_2, …, E_n n ensembles finis tels que $\text{card } \mathrm{E}_1 = N_1$, $\text{card } \mathrm{E}_2 = N_2$, …, $\text{card } \mathrm{E}_n = N_n$ alors :

$$\text{card } \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \mathrm{E}_3 \times ... \times \mathrm{E}_n = \text{card} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i = \text{card } \mathrm{E}_1 \times \text{card } \mathrm{E}_2 \times ... \times \text{card } \mathrm{E}_n = N_1 \times N_2 \times ... \times N_n = \prod_{i=1}^{n} N_i = \prod_{i=1}^{n} \text{card } \mathrm{E}_i$$

→ Application d'un ensemble dans un autre ensemble

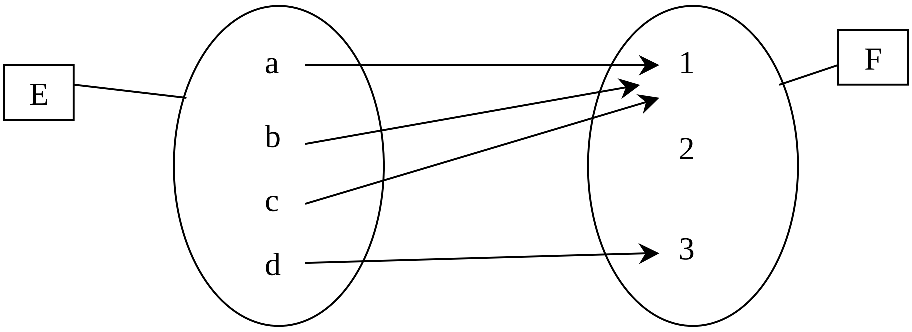
- **Définitions et notations**

Soit E et F deux ensembles.
On dit que « <u>*h* est une application de E dans F</u> » si elle associe à tout élément *x* de E un unique élément de F qui est appelé « <u>image de *x* par l'application *h*</u> » et que l'on notera $h(x)$.

L'application est notée : $h\begin{cases} E \to F \\ x \mapsto h(x) \end{cases}$

L'ensemble E est appelé « <u>ensemble de départ</u> », l'ensemble F « <u>ensemble d'arrivée</u> ».
L'ensemble des couples $(x;h(x))$ est un sous-ensemble de $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ appelé « <u>graphe de *h*</u> ».

Exemple d'application (cf le diagramme sagittal ci-dessous) :



Dans cet exemple, *h* associe aux éléments *a*, *b* et *c* de E l'élément 1 de F.
On écrit : $h(a)=h(b)=h(c)=1$. On dit que les éléments *a*, *b* et *c* de E sont les « <u>antécédents</u> » de 1 par l'application *h*.
Remarquons que l'élément 2 de F n'admet pas d'antécédent par *h*.

- **Image d'une partie. Image réciproque**

Soit E et F deux ensembles et *h* une application de E dans F. Soit A une partie de E.
Le sous-ensemble de F constitué des images des éléments de A est appelé « <u>image de A par *h*</u> » et noté $h(\mathrm{A})$.

Reprenons l'exemple ci-dessus. Considérons $\mathrm{A}_1=\{a;b\}$, $\mathrm{A}_2=\{a;b;c\}$ et $\mathrm{A}_3=\{b;d\}$.
On a : $h(\mathrm{A}_1)=h(\{a;b\})=\{1\}$, $h(\mathrm{A}_2)=\{1\}$ et $h(\mathrm{A}_3)=\{1;3\}$.

Soit B une partie de F. L'ensemble des antécédents par l'application *h* des éléments de B est appelé « <u>image réciproque de B</u> » et est noté $h^{-1}(\mathrm{B})$.

Reprenons l'exemple ci-dessus. Considérons $\mathrm{B}_1=\{1\}$, $\mathrm{B}_2=\{1;2\}$ et $\mathrm{B}_3=\{3\}$.
On a : $h^{-1}(\mathrm{B}_1)=h^{-1}(\{1\})=\{a;b;c\}$, $h^{-1}(\mathrm{B}_2)=\{a;b;c\}$ et $h^{-1}(\mathrm{B}_3)=\{d\}$.

Applications injectives, surjectives et bijectives

Soit E et F deux ensembles et *h* une application de E dans F.
On dit que :
→ « <u>*h* est injective</u> » ou que « <u>*h* est une injection</u> » si tout élément de F admet au plus un antécédent.
→ On dit que « <u>*h* est surjective</u> » ou que « <u>*h* est une surjection</u> » si tout élément de F admet au moins un antécédent.
→ On dit que « <u>*h* est bijective</u> » ou que « <u>*h* est une bijection</u> » si elle est à la fois injective et surjective.

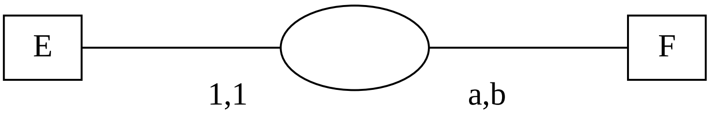
Note : une application peut n'être ni injective, ni surjective. L'application ci-dessus en est un exemple. En effet, puisque 2 n'admet pas d'antécédent, *h* n'est pas surjective. Par ailleurs, 1 admettant trois antécédents, *h* n'est pas injective.

Exemples

Application injective	Application surjective
$h: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto x \end{array}$	$i: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

Cardinalités d'une application

En informatique, une application de l'ensemble E dans l'ensemble F sera représentée comme suit :



« 1,1 » (deux fois le chiffre 1) désigne les « <u>cardinalités de départ</u> » et signifie que tout élément de E admet au moins une image (premier 1) et admet au plus une image (deuxième 1). En d'autres termes, tout élément de E admet exactement une et une seule image (c'est la définition de l'application).
« *a,b* » désigne les « <u>cardinalités d'arrivée</u> » et signifie que tout élément de F admet au moins *a* antécédents et admet au plus *b* antécédents.

Pour une application injective, on a : $b = 1$ (« au plus un antécédent ») ;
Pour une application surjective, on a : $a = 1$ (« au moins un antécédent ») ;
Pour une application bijective, on a : $a = 1$ et $b = 1$.

Composition d'applications

Soit *f* une application de l'ensemble E dans l'ensemble F et *g* une application de l'ensemble F dans l'ensemble G.

Considérons l'application *h* de E dans G définie comme suit : $h\begin{cases} E \to G \\ x \mapsto g\left(f(x)\right) \end{cases}$

L'application *h* est notée « $g \circ f$ » (que l'on peut lire « *g* rond *f* ») et est appelée « <u>application composée de *f* et *g*</u> ».
En résumé : $\forall x \in E,\ h(x) = (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$