Eléments de logique

→ Enoncé, proposition et valeur de vérité

- **Enoncé**

On appelle « énoncé » une phrase mathématique qui :
(a) Respecte les règles de la syntaxe mathématique ;
(b) Respecte, lorsqu'elle est lue, les règles de la grammaire française ;
(c) A un sens ;

Exemples : « $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ » ou « $5x^2 - 4\sqrt{x} < \pi$ »

- **Proposition et valeur de vérité**

Si l'on peut dire d'un énoncé qu'il est « vrai » ou « faux », on l'appelle « <u>proposition</u> ». Les termes « vrai » et « faux » sont appelés « valeurs de vérité » et permettent d'élaborer la logique dite « <u>logique binaire</u> ».
Le mathématicien Georges BOOLE a noté 1 la valeur « vrai » et 0 la valeur « faux ».
On peut ainsi effectuer des calculs sur les valeurs de vérité des proposition : c'est ce que l'on appelle « <u>l'algèbre de BOOLE</u> ».

Par exemple :
(a) « $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$ » est un énoncé vrai. On dira que c'est une proposition vraie.
(b) « $\sqrt{2} = 1,414$ » est un énoncé faux. On dira que c'est une proposition fausse.
(c) « $x^2 + 2x - 3 = 0$ » est un énoncé mais ne connaissant pas la valeur de *x*, on ne peut rien dire sur sa valeur de vérité : il ne s'agit donc pas d'une proposition.

→ Connecteurs logiques

- **Négation**

La notion de négation en logique binaire correspond à celle de contraire du langage courant.
Par exemple la proposition « un vélo a quatre roues » admet comme négation la proposition suivante : « un vélo n'a pas quatre roues ».
Le « connecteur logique négation », qui se note « NON », « NOT », $\neg$ ou par surlignage (on peut donc écrire « NON P », « NOT P », « $\neg$ P » ou « $\overline{\text{P}}$ ») change la valeur de vérité d'une proposition suivant la table de BOOLE ci-dessous :

P	**NON P**
0	1
1	0

Remarque : dans une table de BOOLE, on fait conventionnellement apparaître dans la (les) première(s) ligne(s) la valeur de vérité nulle.

- **Conjonction**

Faire agir le connecteur conjonction sur les deux proposition P et Q consiste à élaborer la nouvelle proposition « P ET Q » appelée « conjonction de P et Q ».
On peut la noter : « P ET Q », « P AND Q » ou « P^Q ».
La table de Boole de ce connecteur est fournie ci-dessous.

P	**Q**	**P ET Q**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Note : il est indispensable de retenir que la conjonction de deux propositions ne peut être vraie que si les deux propositions le sont.

- **Disjonction**

Faire agir le connecteur disjonction sur les deux propositions P et Q consiste à élaborer la nouvelle proposition « P OU Q » appelée « disjonction de P et Q ».
On peut la noter « P OU Q », « P OR Q » ou « $P \vee Q$ ».
La table de Boole de ce connecteur est fournie ci-dessous :

P	**Q**	**P OU Q**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Remarques :

1. Il suffit qu'au moins l'une des deux propositions soit vraie pour que $P \vee Q$ le soit ;
2. Ce connecteur de disjonction est encore appelé « connecteur de disjonction inclusive » car $P \vee Q$ est vraie lorsque P et Q le sont toutes les deux.
   Il existe cependant un connecteur de « disjonction exclusive » tel que $P \vee Q$ n'est vraie que si une seule des deux propositions l'est.

- **Implication**

Il correspond à la structure de raisonnement « <u>Si</u> P <u>alors</u> Q » : on écrira « $P \Rightarrow Q$ » que l'on prononce « « <u>Si</u> P <u>alors</u> Q », « P entraîne Q » ou « P implique Q ».
Sa table de Boole est fournie ci-dessous.

P	**Q**	**$P \Rightarrow Q$**
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Retenir que « le vrai ne peut entraîner le faux » ($3^{ème}$ ligne) !

- **Equivalence**

Il est noté « $\Leftrightarrow$ » et se prononce « P est équivalent à Q », « P si, et seulement si, Q » ou « Pour avoir P il faut et il suffit que l'on ait Q ».
Sa table de Boole est fournie ci-dessous.

P	**Q**	**P $\Leftrightarrow$ Q**
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

On peut aisément vérifier (le faire à titre d'exercice) que l'on a $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \Leftrightarrow \mathrm{Q} \wedge \mathrm{P}$ (commutativité du connecteur ET), $\mathrm{P} \vee \mathrm{Q} \Leftrightarrow \mathrm{Q} \vee \mathrm{P}$ (commutativité du connecteur OU), $\overline{\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{P}} \wedge \overline{\mathrm{Q}}$ et $\overline{\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{P}} \vee \overline{\mathrm{Q}}$;

→ Calcul des prédicats

- **Prédicat**

On appelle « prédicat à une variable » un énoncé $\mathrm{P}(x)$ qui se transforme en proposition lorsqu'on lui ajoute une information sur la variable.

Nous avions considéré l'énoncé « $x^2 + 2x - 3 = 0$ ».
Cet énoncé est un prédicat à une variable puisque dès lors que l'on donne une valeur à la variable x, on est capable de dire si l'égalité $x^2 + 2x - 3 = 0$ est, ou non, vérifiée.
Pour $x = -3$, on obtient une proposition vraie. On dit que -3 est un <u>exemple</u>.
Pour $x = 2$, on obtient une proposition fausse. On dit que 2 est un <u>contre-exemple</u>.

On définirait de façon analogue les prédicat à *n* variables.

- **Quantificateur universel**

Soit le prédicat à une variable $\mathrm{P}(x)$. Supposons que la variable *x* soit un élément de l'ensemble E.
La proposition « Quel que soit *x* élément de E, $\mathrm{P}(x)$ » (que l'on aurait également pu écrire « Pour tout *x* dans E, $\mathrm{P}(x)$ ») peut être écrite de façon abrégée comme suit :

$$\forall x \in \mathrm{E}, P(x)$$

« $\forall$ » se lit onc « pour tout » ou « quel que soit ».
Ce symbole est appelé « quantificateur universel ».
La virgule se lit « on a ».

Exemples :

« $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$ » est un prédicat vrai MAIS : « $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = 1$ » est un prédicat faux puisque la proposition obtenue pour $x = 2$ est fausse.

Pour prouver qu'une proposition quantifiée par « $\forall$ » est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple.

- **Quantificateur existentiel**

Soit le prédicat à une variable $\mathrm{P}(x)$. Supposons que la variable *x* soit un élément de l'ensemble E.
La proposition « Il existe au moins un élément *x* de E tel que $\mathrm{P}(x)$ » peut être écrite de façon abrégée comme suit :

$$\exists x \in \mathrm{E}, P(x)$$

« $\exists$ » se lit onc « il existe ».
Ce symbole est appelé « quantificateur existentiel ».
La virgule se lit « tel que ».

Exemples : « $\exists x \in \mathbb{R}, \ln x = -67$ » est une proposition vraie. « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ » est également une proposition vraie.
En revanche : « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ » est une proposition fausse.

Pour prouver qu'une proposition quantifiée par « $\exists$ » est vraie, il suffit de trouver un exemple convenant.

- **Ordre des quantificateurs**

Considérons les deux prédicats suivants :
« $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}^*, xy = 1$ » et « $\exists y \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, xy = 1$ ».
Le premier signifie que tout réel non nul admet un inverse dans $\mathbb{R}$. Le second signifie que tous les réels non nuls admettent le même inverse !

- **Négation d'une proposition quantifiée**

On admettra le théorème suivant :

  - La négation de la proposition « $\forall x \in \mathrm{E}, P(x)$ » est la proposition « $\exists x \in \mathrm{E}, \mathrm{NON}(P(x))$ » ;
  - La négation de la proposition « $\exists x \in \mathrm{E}, P(x)$ » est la proposition « $\forall x \in \mathrm{E}, \mathrm{NON}(P(x))$ »

On peut donc dresser le tableau suivant :

P	**NON P**
$\forall x \in \mathrm{E}, P(x)$	$\exists x \in \mathrm{E}, \mathrm{NON}(P(x))$
$\exists x \in \mathrm{E}, P(x)$	$\forall x \in \mathrm{E}, \mathrm{NON}(P(x))$

Exemple :

La négation de la proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ » est la proposition « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$ ».
La première est fausse puisque $x = 0$ est un contre-exemple. La seconde est bien vraie puisque pour $x = 0$ on a bien $x^2 \leq 0$.

Ensembles et logique

- **Prédicats et parties d'un ensemble**

Soit, par exemple, à résoudre l'équation : $x^2 - 5x + 6 = 0$.
Elle admet comme solution la paire $\{2;3\}$ qui est une partie de $\mathbb{R}$.

On peut considérer cette équation comme un prédicat : « $x^2 - 5x + 6 = 0$ ».
En résolvant l'équation, on peut affirmer que la proposition « $\forall x \in \{2;3\}, x^2 - 5x + 6 = 0$ » est vraie : on peut alors dire que l'on a « résolu le prédicat » et que son « ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est $\{2;3\}$ ».

On écrira finalement : $\{x \in \mathbb{R}, x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2;3\}$

Soit l'autre exemple : $2x + 3 < 0$.
L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$.
Si, cette fois, on considère le prédicat « $2x + 3 < 0$ », on peut écrire :
$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[, 2x + 3 < 0$. Ici encore, on dira que l'on a résolu le prédicat et que son ensemble des solutions est $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$.

On écrira finalement : $\{x \in \mathbb{R}, 2x + 3 < 0\} = \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$

- **Propositions et parties d'un ensemble**

Nous admettrons qu'il est possible d'interpréter le langage des propositions en langage ensembliste.
Pour cela, on s'appuiera sur le tableau de correspondance suivant :

NON	ET	OU	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
$\complement_E$	$\cap$	$\cup$	$\subset$	$=$

A titre d'exemple considérons les prédicats :
« $2x + 3 > 0$ » et « $3x - 7 < 0$ ».
En les résolvant, on obtient les ensembles de solutions : $\left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ et $\left]-\infty; \frac{7}{3}\right[$. Les propositions : « $\forall x \in \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[, 2x + 3 > 0$ » et « $\forall x \in \left]-\infty; \frac{7}{3}\right[, 3x - 7 < 0$ » sont vraies.
Considérons désormais le prédicat : « $2x + 3 > 0$ et $3x - 7 < 0$ ».
Résoudre le système d'inéquations : $\begin{cases} 2x + 3 > 0 \\ 3x - 7 < 0 \end{cases}$ conduit facilement à l'ensemble des solutions : $\left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[\cap \left]-\infty; \frac{7}{3}\right[= \left]-\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right[$.