Probabilités

→ Vocabulaire

- **Expérience aléatoire**

On appelle « expérience aléatoire » une expérience dont le résultat ne peut, dans la limite de nos capacités et de nos connaissances, être prévu.

Exemples : le jet d'un dé, le tirage d'une carte dans un paquet mélangé, le jet d'une pièce de monnaie, tirage d'une boule dans une urne contenant trois boules indiscernables au toucher et de couleurs différentes, etc.

- **Issue et univers**

On appelle « issue », ou « événement élémentaire », un résultat d'une expérience aléatoire.
On appelle « univers » l'ensemble des issues possibles de l'expérience aléatoire.

Notes :
(1) un univers donné est donc associé à une expérience aléatoire donnée. On doit toujours garder présente à l'esprit cette association ;
(2) une issue est donc un élément de l'univers associée à l'expérience aléatoire.

Par exemple :
(a) Jet d'un dé. $\{1\}$ et $\{4\}$ sont des issues de cette expérience aléatoire et l'univers associé est l'ensemble $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$;
(b) Jet d'une pièce de monnaie. {PILE} et {FACE} sont les deux seules issues possibles (dans la mesure, précisons-le, où l'on suppose que la pièce ne peut retomber et se maintenir sur la tranche …). L'univers associé est $\Omega = \{\text{PILE, FACE}\}$.

- **Evénement**

On appelle « événement » tout sous-ensemble (ou partie) A de l'univers.
On dit qu'un événement est « réalisé » lorsque le résultat de l'expérience aléatoire est l'un des événements élémentaires de A.
L'univers correspond à « l'événement certain » et l'ensemble vide à « l'événement impossible ».

Par exemple : considérons l'expérience du jet d'un dé (l'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$).
Soit l'événement A = « obtenir un nombre pair ».
Si l'issue est le nombre 4, l'événement A est réalisé. Si l'issue est le nombre 1, l'événement n'est pas réalisé.

- **Evénement contraire**

Soit une expérience aléatoire associée à l'univers Ω.
Soit un événement A.
On appelle « événement contraire (ou complémentaire) de A » l'événement $\overline{A}$.

- **Evénements incompatibles**

Soit une expérience aléatoire associée à l'univers Ω.
Soit deux événements A et B.
On dit que les événements A et B sont « incompatibles » ou « disjoints » si l'on a :

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing.$$

Exemple : deux événements élémentaires sont incompatibles !

→ Probabilité

Soit une expérience aléatoire associée à l'univers Ω.
On appelle « probabilité » associée à l'expérience aléatoire toute application *p* de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie les conditions suivantes :

- Pour tout événement A de Ω, $0 \leq p(\mathrm{A}) \leq 1$;
- $p(\varnothing) = 0$ et $p(\Omega) = 1$;
- Quels que soient les événements A et B de Ω : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Remarque :

Si A et B sont deux événements incompatibles, la dernière égalité nous donne :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

En particulier, si on considère A et $\overline{\mathrm{A}}$, il vient : $p(\mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{A}}) = p(\Omega) = 1 = p(\mathrm{A}) + p(\overline{\mathrm{A}})$.

D'où la formule : $\boxed{p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - p(\mathrm{A})}$

→ Equiprobabilité

<u>**Dans cette partie, on suppose que l'univers est un ensemble fini.**</u>

Définition

Soit une expérience aléatoire associée à l'univers Ω.
On suppose que l'on a : $\mathrm{card}(\Omega) = n$ (l'expérience aléatoire comporte donc *n* issues distinctes).
On dit que les événements élémentaires de l'expérience aléatoire sont « équiprobables » (ou que l'on se trouve dans une « situation d'équiprobabilité ») si leurs probabilités sont égales.

Probabilité d'un événement élémentaire

Notons $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ les *n* éléments de Ω. On doit donc avoir : $p(\{e_1\}) = \ldots = p(\{e_n\})$.

Ces événements étant incompatibles, on a aussi : $p(\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \ldots \{e_n\}) = n \times p(\{e_1\}) = 1$.

On en déduit : $p(\{e_1\}) = \dfrac{1}{n}$ et, finalement : $\boxed{p(\{e_1\}) = p(\{e_2\}) = \ldots p(\{e_n\}) = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\mathrm{card}(\Omega)}}$

Probabilité d'un événement quelconque

Les hypothèses sont identiques aux précédentes.

On considère ici un événement A quelconque.
On a vu que tout événement élémentaire *e* admettait comme probabilité : $p(\{e\}) = \dfrac{1}{\mathrm{card}(\Omega)}$

L'événement A comporte *k* éléments ($k \le n$) : $\mathrm{A} = \{a_1 ; a_2 ; ... ; a_k\}$.
On peut alors écrire : $\mathrm{A} = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup ... \cup \{a_k\}$.
Comme les événements $\{a_i\}$ sont élémentaires, on a :

$$p(\mathrm{A}) = p(\{a_1\}) + p(\{a_2\}) + ... + p(\{a_k\}) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}_{k \text{ termes}} = \frac{k}{n}$$

Mais on a : $k = \mathrm{card}(\mathrm{A})$.

On en déduit, finalement :

$$\boxed{p(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{card}(\mathrm{A})}{\mathrm{card}(\Omega)}}$$

On peut mémoriser ce résultat à l'aide de « l'égalité » suivante :

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre de résultats favorables}}{\text{nombre de résultats possibles}}$$

Remarque :
C'est ici que les résultats sur le dénombrement prennent tout leur sens : dans bien des cas, il faudra faire appel à ces résultats pour compter (on dira donc « dénombrer » dorénavant) le « nombre de résultats favorables » et le « nombre de résultats possibles ».
Le tirage de cartes est un exemple typique où l'on sera confronté à ce genre de calculs.

ATTENTION !
La formule précédente, pour simple et élégante qu'elle puisse être, repose sur l'hypothèse déterminante de l'équiprobabilité sur un univers fini !

→ Probabilité conditionnelle

- **Evénements indépendants**

Soit une expérience aléatoire associée à l'univers Ω.
Soit deux événements A et B.
On dit que les événements A et B sont « indépendants » si l'on a :

$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}).p(\mathrm{B})$$

Cas particulier : les événements impossible ($\varnothing$) et certain (Ω) sont indépendants de tout autre événement puisque l'on a, pour tout événement A :

$$p(\mathrm{A}\cap\varnothing)=p(\varnothing)=0=p(\mathrm{A}).p(\varnothing) \text{ et } p(\mathrm{A}\cap\Omega)=p(A)=p(A).1=p(\mathrm{A}).p(\Omega)$$

- **Probabilité conditionnelle**
  Soit une expérience aléatoire associée à l'univers Ω.
  Soit deux événements A et B, B n'étant pas l'événement impossible.
  On appelle « probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisée » (ou, plus succinctement, « probabilité de A sachant B ») :
  $$p(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}$$

Remarques :

1. La notion de probabilité conditionnelle correspond à un changement d'univers …
   En considérant que l'événement B est réalisé, tout se passe comme si B était le nouvel univers.
   On note d'ailleurs que si on définit, pour toute partie X de B, p' par :
   $$p'(X)=p(\mathrm{X}|\mathrm{B})=\frac{p(\mathrm{X}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}=\frac{p(\mathrm{X})}{p(\mathrm{B})}$$
   on a affaire à une probabilité sur B.

2. De façon symétrique, on a : $p(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\dfrac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}$. On en déduit :
   $$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A}|\mathrm{B}).p(\mathrm{B})=p(\mathrm{B}|\mathrm{A}).p(\mathrm{A}) \ ;$$

3. Si les événements A et B sont indépendants, on a :
   $$p(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}=\frac{p(\mathrm{A}).p(\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}=p(\mathrm{A})$$
   et, de façon analogue :
   $$p(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}=\frac{p(\mathrm{A}).p(\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}=p(\mathrm{B})$$
   En d'autres termes, les probabilités conditionnelles sont, pour deux événements indépendants, égales aux probabilités « simples ». Ce résultat est assez intuitif !