Cours (Terminale)

→ Probabilités (révisions 1ère)

Quelques rappels et compléments sur les ensembles

Union de deux ensembles

On appelle « union de deux ensembles E et F » l'ensemble noté $\boxed{\mathrm{E} \cup \mathrm{F}}$ dont les éléments sont constitués des éléments de E et de ceux de F.

Exemple : si $\mathrm{E} = \{a; b; 6; \pi\}$ et $\mathrm{F} = \{7; \pi; a; e\}$ alors $\mathrm{E} \cup \mathrm{F} = \{a; b; e; 6; 7; \pi\}$.

Intersection de deux ensembles

On appelle « intersection de deux ensembles E et F » l'ensemble noté $\boxed{\mathrm{E} \cap \mathrm{F}}$ dont les éléments sont constitués des éléments appartenant à la fois à E et à F.

Exemple : si $\mathrm{E} = \{a; b; 6; \pi\}$ et $\mathrm{F} = \{7; \pi; a; e\}$ alors $\mathrm{E} \cap \mathrm{F} = \{a; \pi\}$.

Partie (ou sous-ensemble) d'un ensemble

On appelle « partie (ou sous-ensemble) d'un ensemble E » tout ensemble A dont tous les éléments appartiennent à E.

Cette appartenance se traduit par l'écriture $\boxed{\mathrm{A} \subset \mathrm{E}}$ que l'on peut lire « A est inclus dans E »

On distingue deux parties particulières :

La <u>partie vide</u>, notée $\varnothing$ ou $\{\ \}$ (moins fréquent), qui ne contient aucun élément ;

La <u>partie pleine</u> correspondant à l'ensemble E lui-même.

Exemple : si $\mathrm{E} = \{a; b; 6; \pi\}$ alors $\mathrm{A} = \{a\}$ et $\mathrm{B} = \{6; a; \pi\}$ sont deux parties de E (il y en a 16 au total en comptant E et $\varnothing$. Saurez-vous les retrouver ? Sauriez-vous trouver le nombre de parties d'un ensemble comportant *n* éléments ?).
Par ailleurs on a ici : $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$.

Vocabulaire des probabilités

Expérience aléatoire

On appelle « <u>expérience aléatoire</u> » une expérience dont le résultat ne peut (de façon absolue ou dans la limite de nos capacités et de nos connaissances) être prévu.

Exemples : le jet d'un dé, le tirage d'une carte dans un paquet mélangé, le jet d'une pièce de monnaie, le tirage d'une boule dans une urne contenant trois boules indiscernables au toucher et de couleurs différentes, etc.

Issue et univers

On appelle « <u>issue</u> », ou « <u>événement élémentaire</u> », un résultat d'une expérience aléatoire.
On appelle « <u>univers</u> » l'ensemble des issues possibles de l'expérience aléatoire.

Notes :
(1) un univers donné est donc associé à une expérience aléatoire donnée. On doit toujours garder présente à l'esprit cette association ;
(2) une issue est donc une partie (ou sous-ensemble) de l'univers associée à l'expérience aléatoire (seul point particulier : cette partie ne comporte qu'un seul élément !).

Par exemple :
(a) Jet d'un dé. $\{1\}$ et $\{4\}$ sont des issues de cette expérience aléatoire et l'univers associé est l'ensemble $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$;
(b) Jet d'une pièce de monnaie. {PILE} et {FACE} sont les deux seules issues possibles
L'univers associé est $\Omega = \{\text{PILE, FACE}\}$.

Evénement

On appelle « <u>événement</u> » tout sous-ensemble (ou partie) A de l'univers.
On dit qu'un événement est « <u>réalisé</u> » lorsque le résultat de l'expérience aléatoire est l'un des événements élémentaires de A.
L'univers correspond à « <u>l'événement certain</u> » et l'ensemble vide à « <u>l'événement impossible</u> ».

Par exemple : considérons l'expérience du jet d'un dé (l'univers est $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$). Soit l'événement A = « obtenir un nombre pair ».
Si l'issue correspond au nombre 4, l'événement A est réalisé.
Si l'issue est le nombre 1, l'événement A n'est pas réalisé.
<u>Les issues réalisant l'événement A</u> sont donc : $\{2\}$, $\{4\}$ et $\{6\}$.
On a donc : $A = \{2;4;6\}$
L'événement « obtenir un chiffre inférieur à 6 » est l'événement certain puisque l'on obtient aisément $A = \{1;2;3;4;5;6\} = \Omega$.
L'événement « obtenir un chiffre supérieur à 7 » est l'événement impossible ! ($A = \varnothing$)

Evénement contraire

Soit A un événement de l'univers Ω associé à une expérience aléatoire.
On appelle « <u>événement contraire (ou complémentaire) de l 'événement A</u> » l'événement constitué des issues de l'univers qui n'appartiennent pas à A.
On note cet événement $\boxed{\overline{A}}$.

On vérifie aisément à l'aide de cette définition que l'on a les propriétés suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{c}\overline{\varnothing}=\Omega\\ \overline{\Omega}=\varnothing\\ \mathrm{A}\cup\overline{\mathrm{A}}=\Omega\\ \mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{A}}=\varnothing\end{array}}$$

Exemple :
Avec $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$, $\mathrm{A}=\{2;4\}$ et $\mathrm{B}=\{1;2;3;6\}$ on obtient :
$\overline{\mathrm{A}}=\{1;3;5;6\}$ et $\overline{\mathrm{B}}=\{4;5\}$.

Probabilité

Soit une expérience aléatoire associée à l'univers $\Omega=\{x_1,x_2,x_3,...,x_n\}$.
Définir une « probabilité » sur Ω c'est associer à chaque élément x_i de l'ensemble Ω un réel noté p_i (ou $p(x_i)$) appartenant à l'intervalle $[0;1]$, ces réels vérifiant :

$$\boxed{p_1+p_2+p_3+...+p_n=1}$$

On dit que « p_i est la probabilité associée à l'issue $\{x_i\}$ ».

Remarque : l'égalité précédente peut être écrite $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$, le symbole Σ correspondant à la lettre grecque majuscule « sigma ».
Si on a $p_1=p_2=p_3=...=p_n$, on dit que « la probabilité est <u>équirépartie</u> » ou que l'on se trouve dans une « <u>situation d'équiprobabilité</u> ».

On a alors : $\boxed{p_1=p_2=p_3=...=p_n=\frac{1}{n}}$

Exemples :

(a) En effectuant le jet d'un dé non pipé un certain nombre de fois, on constate que les fréquences d'apparition des six faces :
- Sont voisines de $\frac{1}{6}$;
- Ont une somme égale à 1.

En posant $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$, on peut définir une probabilité sur Ω grâce à l'égalité :

$$p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6=\frac{1}{6}.$$

(b) On peut caractériser un dé pipé en donnant les probabilités d'apparition des faces suivantes :

$$p_1=\frac{1}{12},\ p_2=\frac{1}{6},\ p_3=\frac{1}{12},\ p_4=\frac{1}{3},\ p_5=\frac{1}{4}\ \text{et}\ p_6=\frac{1}{12}$$

Probabilité d'un événement

Soit une expérience aléatoire associée à l'univers $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ sur lequel on a défini une probabilité.
Soit A un événement de Ω.
La « probabilité de l'événement A », notée $p(\mathrm{A})$, est égale à la somme des probabilités des issues de l'expérience aléatoire réalisant A.
Si la probabilité est équirépartie on retiendra :

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant A}}{\text{nombre total d'issues}}$$

Exemples :

(a) Considérons le dé pipé défini ci-dessus.
Soit l'événement A : « la face est paire ».
On a immédiatement : $\mathrm{A} = \{2; 4; 6\}$.
D'après la définition précédente, il vient :

$$p(\mathrm{A}) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} + \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \boxed{\frac{7}{12}}$$

(b) Dans le cas d'un dé non pipé, on a : $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$.
Si on considère à nouveau $\mathrm{A} = \{2; 4; 6\}$, il vient :

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant A}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Résultat que l'on retrouve évidemment en utilisant :

$$p(\mathrm{A}) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Propriétés

Soit une expérience aléatoire associée à l'univers $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ sur lequel on a défini une probabilité.
Soit A et B deux événements de Ω.

- $p(\Omega) = 1$ et $p(\varnothing) = 0$
- Si A et B vérifient $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ alors on a : $p(\mathrm{A}) \leq p(\mathrm{B})$
- $p(\mathrm{A}) + p(\overline{\mathrm{A}}) = 1$

Exemple :
On considère un jeu de 32 cartes et on tire au hasard une carte dans ce jeu.
On demande les probabilités des événements suivants :
A : « Obtenir un roi »
B : « Ne pas obtenir un roi »

On est dans une situation d'équiprobabilité et le nombre total d'issues correspond au nombre total de tirages possibles, c'est à dire au nombre total de cartes, soit 32.

Les nombre d'issues correspondant à l'événement A vaut 4 puisque le jeu comporte 4 rois.

Il vient donc : $p(\mathrm{A}) = \frac{4}{32} = \boxed{\frac{1}{8}}$.

L'événement B est l'événement contraire de l'événement A ! On a donc : $\mathrm{B} = \overline{\mathrm{A}}$.
L'égalité $p(\mathrm{A}) + p(\overline{\mathrm{A}}) = 1$ nous permet alors d'écrire : $p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) = 1$.

D'où : $p(\mathrm{B}) = 1 - p(\mathrm{A}) = 1 - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{7}{8}}$

Evénements « A et B » et « A ou B »

Soit une expérience aléatoire associée à l'univers Ω.
Soit A et B deux événements.
L'événement « A et B » est l'événement composé des issues réalisant à la fois A et B.
Il s'agit dont de la partie $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ de l'univers Ω.
Si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$, on dit que les événements « A et B sont <u>incompatibles</u> ».

L'événement « A ou B » est l'événement composé des issues réalisant au moins l'un des événements A et B.
Il s'agit donc de la partie $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ de l'univers Ω.

Exemple :
Reprenons l'exemple du jeu de 32 cartes et considérons cette fois les deux événements :
A : « Obtenir une dame »
B : « Obtenir un cœur »
L'événement « A et B » correspond au tirage d'une carte qui est à la fois une dame et un cœur. L'événement $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ correspond donc au tirage de la dame de cœur et il vient immédiatement : $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{32}$
L'événement « A ou B » correspond au tirage d'une carte qui est soit une dame, soit un cœur.
Il y a exactement 11 cartes possibles : les 8 cœurs (dont la dame de cœur) auxquels il convient d'ajouter les dames de trèfle, carreau et pique.
On en déduit : $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \frac{11}{32}$

Propriétés

Soit une expérience aléatoire associée à l'univers $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ sur lequel on a défini une probabilité.
Soit A et B deux événements de Ω.

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

Remarques :

- Comme pour tout événement A on a $\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{A}} = \varnothing$ et $\mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{A}} = \Omega$, l'égalité précédente nous redonne en posant $\mathrm{B} = \overline{\mathrm{A}}$: $p(\mathrm{A}) + p(\overline{\mathrm{A}}) = 1$;
- **<u>Si A et B sont deux événements incompatibles</u>**, on a : $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$

Exemple :
Reprenons la situation précédente.

On a facilement : $p(\mathrm{A})=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$ et $p(\mathrm{B})=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$.

Il vient donc : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{32}=\frac{4+8-1}{32}=\boxed{\frac{11}{32}}$

On retrouve le résultat obtenu précédemment.