Calculer :

$$\int \arctan(x)\mathrm{d}x$$

Analyse

La fonction $\arctan$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle est donc intégrable sur cet intervalle.

Nous pouvons procéder à une intégration par parties. L'objectif, avec cette approche, est de faire apparaître la dérivée de $\arctan(x)$ qui nous est (au moins un peu !) familière. Mais on peut également mener le calcul en effectuant le changement de variable : $t = \arctan(x)$ qui fournit simplement : $\mathrm{d}x = \left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t$.

Dans ce qui suit, nous développons les deux approches.

Résolution

1ère méthode : intégration par parties

Nous effectuons une intégrations par parties en posant : $f(x) = \arctan(x)$ et $g'(x) = 1$.

On a alors : $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et :

$$\begin{aligned}
\int \arctan(x)\mathrm{d}x &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x \\
&= x\arctan(x) - \int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x \\
&= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x \\
&= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + K \\
&= x\arctan(x) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + K
\end{aligned}$$

où K est une constante réelle quelconque.

Deuxième méthode : changement de variable

Nous introduisons ici la nouvelle variable t définie par : $t = \arctan(x)$. On a alors : $x = \tan(t)$ et $\mathrm{d}x = \left(1+\tan^2(t)\right)\mathrm{d}t$.

Le calcul se récrit donc : $\int \arctan(x)\mathrm{d}x = \int t\left(1+\tan^2(t)\right)\mathrm{d}t$.

La fonction sous le signe somme, $g(t) = t\left(1+\tan^2(t)\right)$, est le produit d'une fonction simple et d'une dérivée, on va donc mener une intégration par parties en posant $u(t) = t$ qui donne $u'(t) = 1$ et $v'(t) = 1+\tan^2(t)$ qui est la dérivée de la fonction tangente.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\int t\left(1+\tan^2(t)\right)\mathrm{d}t &= u(t)v(t) - \int u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\ &= t\tan(t) - \int \tan(t)\mathrm{d}t \\ &= t\tan(t) + \ln\left|\cos t\right| + C \quad (1)\end{aligned}$$

Pour revenir à la variable initiale, on doit garder présent à l'esprit que la variable t, comme valeur prise par la fonction $\arctan$ appartient à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ (voir le cours). De fait, le cosinus correspondant est positif. En partant alors de l'égalité : $1+\tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$, on a :

$$\cos^2(t) = \frac{1}{1+\tan^2(t)} \Leftrightarrow \cos(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(t)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(1) se récrit alors :

$$\int \arctan(x)\mathrm{d}x = \int t\left(1+\tan^2(t)\right)\mathrm{d}t = t\tan t + \ln\left|\cos t\right| + C = x\arctan(x) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C$$

On retrouve le résultat obtenu avec la méthode précédente.

Résultat final

$$\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + K$$

où K est une constante réelle quelconque