

Déterminer :

$$\int x(\arctan(x))^2 dx$$

Analyse

La fonction \arctan est définie et continue sur \mathbb{R} , elle est donc intégrable sur cet intervalle.

Nous pouvons procéder à une intégration par parties. L'objectif, avec cette approche est de faire apparaître la dérivée de $\arctan(x)$ qui nous est (au moins un peu !) familière et de faire disparaître le carré sous le signe somme.

Dans ce qui suit, nous développons cette approche.

Résolution

Nous effectuons une intégrations par parties en posant : $f(x) = (\arctan(x))^2$ et $g'(x) = x$.

On a alors : $f'(x) = \frac{2\arctan(x)}{1+x^2}$ et ... nous réalisons que considérer $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ est un choix

probablement rapide ! En effet, les primitives de $g'(x) = x$ s'écrivent : $\int \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{2}x^2 + k$. En

choisissant alors $k = \frac{1}{2}$, le produit $f'(x)g(x)$ va s'en trouver significativement simplifié (ceci

étant, nous expliciterons également cette intégration par parties dans le cas du choix

$g(x) = \frac{1}{2}x^2$...). On choisit donc : $g(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int x(\arctan(x))^2 dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 1)(\arctan(x))^2 - \frac{1}{2} \int (x^2 + 1) \frac{2\arctan(x)}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 1)(\arctan(x))^2 - \int \arctan(x) dx\end{aligned}$$

Pour un traitement détaillé du calcul de $\int \arctan(x) dx$, on pourra se reporter à l'exercice correspondant. Nous en redonnons ci-après l'essentiel.

On effectue une intégration par parties en posant $u(x) = \arctan(x)$ et $v'(x) = 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int \arctan(x) dx &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx \\ &= x \arctan(x) - \int \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C \\ &= x \arctan(x) - \ln(\sqrt{x^2+1}) + C \end{aligned}$$

où C est une constante réelle quelconque.

On en tire alors finalement :

$$\int x(\arctan(x))^2 dx = \frac{1}{2}(x^2+1)(\arctan(x))^2 - x \arctan(x) + \ln(\sqrt{x^2+1}) + K$$

Et si nous avons mené l'intégration par parties avec $g(x) = \frac{1}{2}x^2$?

Nous aurions eu :

$$\begin{aligned} \int x(\arctan(x))^2 dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2(\arctan(x))^2 - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{2 \arctan(x)}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2(\arctan(x))^2 - \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} \arctan(x) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2(\arctan(x))^2 - \int \arctan(x) dx + \int \frac{\arctan(x)}{x^2+1} dx \end{aligned}$$

$\int \frac{\arctan(x)}{x^2+1} dx$ est de la forme $\int \varphi'(x)\varphi(x) dx$, avec $\varphi(x) = \arctan(x)$, qui s'intègre en

$\frac{1}{2}\varphi^2(x) + C$. On a donc : $\int \frac{\arctan(x)}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}(\arctan(x))^2 + C$, soit, en ne faisant pas apparaître

la constante C puisqu'il reste un calcul de primitives à mener :

$$\begin{aligned} \int x(\arctan(x))^2 dx &= \frac{1}{2}x^2(\arctan(x))^2 + \frac{1}{2}(\arctan(x))^2 - \int \arctan(x) dx \\ &= \frac{1}{2}(x^2+1)(\arctan(x))^2 - \int \arctan(x) dx \end{aligned}$$

On est ainsi ramené à la même étape intermédiaire ... mais via quelques calculs supplémentaires.

Résultat final

$$\int x(\arctan(x))^2 dx = \frac{1}{2}(x^2 + 1)(\arctan(x))^2 - x \arctan(x) + \ln(\sqrt{x^2 + 1}) + K$$

où K est une constante réelle quelconque.