

Déterminer les primitives de :

$$f(x) = \frac{(x^4 - 1)^3}{x}$$

Analyse

La fraction rationnelle $\frac{(x^4 - 1)^3}{x}$ n'est pas définie pour $x_0 = 0$. En revanche, sur les intervalles où elle est définie, $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, elle est continue. Ce sont donc les intervalles d'intégrabilité et nous nous plaçons sur l'un d'entre eux pour mener les calculs.

Le dénominateur étant simple, nous pouvons développer le numérateur. En y regardant de plus près, un changement de variable peut également servir de point de départ.

Bien que les deux méthodes soient voisines, nous les développons ci-dessous.

Résolution

1^{ère} méthode : développement du numérateur

Le numérateur se développe comme suit : $(x^4 - 1)^3 = x^{12} - 3x^8 + 3x^4 - 1$

La fraction se réécrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{(x^4 - 1)^3}{x} &= \frac{1}{x}(x^{12} - 3x^8 + 3x^4 - 1) \\ &= x^{11} - 3x^7 + 3x^3 - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

D'où :

$$\int \frac{(x^4 - 1)^3}{x} dx = \int \left(x^{11} - 3x^7 + 3x^3 - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{12}x^{12} - \frac{3}{8}x^8 + \frac{3}{4}x^4 - \ln|x| + K$$

où K est une constante réelle quelconque.

La présence du logarithme népérien rend la limite d'une telle fonction infinie en $x_0 = 0$, on ne peut donc envisager un prolongement par continuité en ce point.

2^{ème} méthode : changement de variable

En écrivant : $\frac{(x^4 - 1)^3}{x} = \frac{(x^4 - 1)^3 x^3}{x^4}$, on constate que l'on peut travailler avec la nouvelle variable $X = x^4$ qui donne $dX = 4x^3 dx$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\int \frac{(x^4 - 1)^3}{x} dx &= \int \frac{(x^4 - 1)^3 x^3}{x^4} dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{(X - 1)^3}{X} dX \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{X^3 - 3X^2 + 3X - 1}{X} dX \\ &= \frac{1}{4} \int \left(X^2 - 3X + 3 - \frac{1}{X} \right) dX \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} X^3 - \frac{3}{2} X^2 + 3X - \ln|X| \right) + K\end{aligned}$$

On revient alors à la variable initiale en remplaçant X par x^4 :

$$\begin{aligned}\int \frac{(x^4 - 1)^3}{x} dx &= \frac{1}{12} x^{12} - \frac{3}{8} x^8 + \frac{3}{4} x^4 - \frac{1}{4} \ln(x^4) + K \\ &= \frac{1}{12} x^{12} - \frac{3}{8} x^8 + \frac{3}{4} x^4 - \ln|x| + K\end{aligned}$$

On retrouve le résultat obtenu avec la méthode précédente.

Résultat final

$$\int \frac{(x^4 - 1)^3}{x} dx = \frac{1}{12} x^{12} - \frac{3}{8} x^8 + \frac{3}{4} x^4 - \ln|x| + K$$

Où K est une constante réelle quelconque.