

Calculer :

$$\int \cos^2(x) \sin^3(x) dx$$

---

## Analyse

La fonction sous le signe somme est intégrable sur  $\mathbb{R}$  puisqu'elle y est définie et continue (produit de deux fonctions définies et continues sur  $\mathbb{R}$  comme puissances de fonctions définies et continue sur  $\mathbb{R}$  ...).

Nous sommes dans une situation classique où un changement de variable simple permet de mener le calcul.

---

## Résolution

La transformation  $x \rightarrow -x$  laisse la forme différentielle  $\omega(x) = \cos^2(x) \sin^3(x) dx$  invariante puisque  $d(-x) = -dx$  et  $\cos^2(-x) \sin^3(-x) = -\cos^2(x) \sin^3(x)$ . On peut donc (d'après la règle de BIOCHE correspondante) effectuer le changement de variable :  $u = \cos(x)$  qui donne  $du = -\sin x dx$ .

Il convient désormais de faire apparaître sous le signe somme la nouvelle variable :

$$\begin{aligned} \int \cos^2(x) \sin^3(x) dx &= \int \cos^2(x) (1 - \cos^2(x)) \sin x dx \\ &= -\int \cos^2(x) (1 - \cos^2(x)) d(\cos x) \\ &= -\int u^2 (1 - u^2) du \\ &= \int (u^4 - u^2) du \end{aligned}$$

On est ainsi ramené au calcul des primitives d'un polynôme et on a :

$$\int (u^4 - u^2) du = \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{3} u^3 + C$$

où  $C$  est une constante réelle quelconque.

Le calcul s'achève alors en remplaçant  $u$  par  $\cos(x)$  :

$$\int \cos^2(x) \sin^3(x) dx = \frac{1}{5} \cos^5(x) - \frac{1}{3} \cos^3(x) + C$$

---

### Résultat final

$$\int \cos^2(x) \sin^3(x) dx = \frac{1}{5} \cos^5(x) - \frac{1}{3} \cos^3(x) + C$$

où  $C$  est une constante réelle quelconque