Déterminer, sur $]4,+\infty[$, la primitive F de :

$$f(x)=\frac{2}{x-4}+\frac{5}{x+2}$$

qui vérifie $F(0)=0$.

Analyse

La fonction *f* est la somme de deux fonctions continues sur l'intervalle précisé. Elles y sont donc intégrables et leurs primitives s'obtiennent facilement. La condition imposée permet alors de n'en retenir qu'une seule.

Résolution

Sur $]4,+\infty[$, on a : $x-4>0$ et $x+2>0$.

On a alors :

$$\int \frac{2}{x-4}dx = 2\ln|x-4|+C_1 = \ln\left((x-4)^2\right)+C_1$$

et

$$\int \frac{5}{x+2}dx = 5\ln|x+2|+C_2 = \ln\left((x+2)^5\right)+C_2$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

Il vient donc, finalement :

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{2}{x-4}+\frac{5}{x+2}\right)dx &= \ln\left((x-4)^2\right)+C_1+\ln\left((x+2)^5\right)+C_2\\ &= \ln\left((x-4)^2\right)+\ln\left((x+2)^5\right)+C\\ &= \ln\left((x-4)^2(x+2)^5\right)+C\end{aligned}$$

La somme de deux constantes quelconques (C_1+C_2) peut être remplacée par une nouvelle constante C quelconque.

Pour déterminer la primitive F vérifiant $F(0)=0$, on écrit alors :

$$\begin{aligned} & F(0)=0 \\ & \Leftrightarrow \ln\left((-4)^2 2^5\right)+C=0 \\ & \Leftrightarrow \ln\left(2^4 2^5\right)+C=0 \\ & \Leftrightarrow \ln\left(2^9\right)+C=0 \\ & \Leftrightarrow 9\ln 2+C=0 \\ & \Leftrightarrow C=-9\ln 2 \end{aligned}$$

La primitive cherchée s'écrit donc finalement :

$$F(x)=\ln\left((x-4)^2(x+2)^5\right)-9\ln 2=\ln\left(\frac{(x-4)^2(x+2)^5}{2^9}\right)$$

Résultat final

La primitive F sur $]4,+\infty[$ de $f(x)=\frac{2}{x-4}+\frac{5}{x+2}$

qui vérifie $F(0)=0$ s'écrit :

$$F(x)=\ln\left(\frac{(x-4)^2(x+2)^5}{2^9}\right)$$