Déterminer les primitives de :

$$f(x)=3x^3-\frac{6}{x^5}$$

Analyse

On considère que la fonction f est la somme de deux fonctions et on détermine une primitive de chacune d'elles.

Résolution

La fonction f fournie est définie sur $I=\mathbb{R}^*$. On détermine donc les primitives sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$.

La fonction $x\mapsto 3x^3$ est une fonction polynôme dont une primitive s'écrit : $x\mapsto 3\times\frac{1}{4}x^4$, c'est à dire : $x\mapsto \frac{3}{4}x^4$.

La fonction $x\mapsto \frac{6}{x^5}$ peut se récrire : $x\mapsto 6x^{-5}$.
Elle admet une primitive de la forme : $x\mapsto kx^{-4}$.
Celle-ci se dérive en : $x\mapsto -4kx^{-5}$. On doit donc avoir : $-4k=6$. Soit $k=-\frac{3}{2}$.
Finalement, une primitive de $x\mapsto \frac{6}{x^5}$ s'écrit : $x\mapsto -\frac{3}{2}x^{-4}$.
Une primitive de la fonction f est ainsi définie par :

$$x\mapsto \frac{3}{4}x^4-\frac{3}{2}x^{-4}$$

Soit :

$$x\mapsto \frac{3}{4}x^4-\frac{3}{2}\frac{1}{x^4}$$

Finalement, les primitives de la fonction f sont de la forme :

$$x \mapsto \frac{3}{4}x^4 - \frac{3}{2}\frac{1}{x^4} + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

Résultat final

Les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 3x^3 - \frac{6}{x^5}$

sont les fonctions F de la forme :

$$F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{3}{2}\frac{1}{x^4} + C$$

où C est une constante réelle quelconque.