Déterminer les primitives de :

$$f(x)=(3x+2)^4$$

Analyse

La fonction f est de la forme $(u(x))^4$ où u est une fonction affine ...

Résolution

La fonction f fournie est définie sur $I=\mathbb{R}$ (il s'agit d'une fonction polynôme de degré 4).
On détermine donc les primitives sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto 3x+2$ admet comme dérivée la fonction $x \mapsto 3$.

On peut alors écrire : $(3x+2)^4 = \dfrac{1}{3}\times 3(3x+2)^4$.

Introduisons alors la fonction affine u définie par : $u(x)=3x+2$.

D'après ce qui précède, on a : $f(x)=\dfrac{1}{3}\times 3(3x+2)^4 = \dfrac{1}{3}\times u'(x)\times(u(x))^4$.

Or, la dérivée de la fonction $x \mapsto (u(x))^5$ est la fonction définie par : $x \mapsto 5u'(x)(u(x))^4$.

On écrit alors : $f(x)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{5}\times 5u'(x)(u(x))^4 = \dfrac{1}{15}\times\left((u(x))^5\right)'$.

La fonction f est donc, à un facteur multiplicatif près, la dérivée de la fonction $x \mapsto (3x+2)^5$

La fonction f admet donc pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{15}(3x+2)^5$.

Finalement, les primitives de la fonction f sont de la forme :

$$x \mapsto \frac{1}{15}(3x+2)^5 + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

Résultat final

Les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3x+2)^4$ sont les fonctions F de la forme :

$$x \mapsto \frac{1}{15}(3x+2)^5 + C$$

où C est une constante réelle quelconque.