

Déterminer la primitive F de :

$$f(x) = x^7 - 5x^3 + 4$$

qui vérifie $F(0) = 2$.

Analyse

La fonction f est un polynôme. On détermine dans un premier temps toutes ses primitives sur \mathbb{R} puis on prend en compte la condition $F(0) = 2$ pour déterminer la primitive cherchée.

Résolution

On intègre chaque terme de la fonction polynôme comme fonction puissance :

$x \mapsto x^7$ admet $x \mapsto \frac{1}{8}x^8$ comme primitive sur \mathbb{R} .

$x \mapsto -5x^3$ admet $x \mapsto -\frac{5}{4}x^4$ comme primitive sur \mathbb{R} .

$x \mapsto 4$ admet $x \mapsto 4x$ comme primitive sur \mathbb{R} .

On en déduit que la fonction f admet la fonction $x \mapsto \frac{1}{8}x^8 + \frac{-5}{4}x^4 + 4x$ comme primitive sur \mathbb{R} .

Finalement, les primitives de f sur \mathbb{R} sont de la forme :

$$x \mapsto \frac{1}{8}x^8 + \frac{-5}{4}x^4 + 4x + k$$

où k est une constante réelle quelconque.

Nous cherchons la primitive F vérifiant : $F(0) = 2$.

La fonction F étant de la forme ci-dessus, on a : $F(0) = \frac{1}{8} \times 0^8 + \frac{-5}{4} \times 0^4 + 4 \times 0 + k = k$.

La condition $F(0) = 2$ équivaut donc à : $k = 2$.

La primitive F cherchée s'écrit donc :

$$F : x \mapsto \frac{1}{8}x^8 + \frac{-5}{4}x^4 + 4x + 2$$

Résultat final

La primitive F de la fonction f , définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^7 - 5x^3 + 4$

et vérifiant $F(0) = 2$ est définie par :

$$F : x \mapsto \frac{1}{8}x^8 + \frac{-5}{4}x^4 + 4x + 2$$