Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=(x-2)\left(-x^2+4x-15\right)^4$$

Analyse

La fonction g est, à un facteur multiplicatif près, le produit de la puissance d'une fonction par sa dérivée …

Résolution

Considérons la fonction polynôme u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u : x \mapsto -x^2+4x-15$$

En tant que fonction polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée u' s'écrit :

$$u : x \mapsto -2x+4$$

Pour tout x réel, on peut écrire : $-2x+4=-2(x-2)$.
Il vient alors :

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-2)\left(-x^2+4x-15\right)^4 \\ &= \frac{1}{-2}\times(-2)(x-2)\left(-x^2+4x-15\right)^4 \\ &= -\frac{1}{2}(-2x+4)\left(-x^2+4x-15\right)^4 \\ &= -\frac{1}{2}u'(x)u^4(x) \end{aligned}.$$

Or, pour tout entier n différent de -1, la fonction $u'u^n$ admet la fonction $\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$ comme primitive. On en déduit que la fonction $x \mapsto (-2x+4)\left(-x^2+4x-15\right)^4$ admet comme primitive la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{5}\left(-x^2+4x-15\right)^5$.

Finalement, pour obtenir une primitive de la fonction h, il suffit de multiplier la fonction que nous venons d'obtenir par $-\frac{1}{2}$:

$$x \mapsto -\frac{1}{10}\left(-x^2+4x-15\right)^5$$

Résultat final

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par $g(x)=(x-2)\left(-x^2+4x-15\right)^4$ est la fonction définie par :

$$x \mapsto -\frac{1}{10}\left(-x^2+4x-15\right)^5$$