Déterminer une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=\frac{1-5x}{\left(5x^2-2x+5\right)^{11}}$$

Analyse

La fonction h est, à un facteur multiplicatif près, le produit de la puissance d'une fonction par sa dérivée, encore faut-il récrire le rapport sous forme d'un produit …

Résolution

Considérons la fonction polynôme u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u : x \mapsto 5x^2-2x+5$$

En tant que fonction polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée u' s'écrit :

$$u : x \mapsto 10x-2$$

Pour tout x réel, on peut écrire : $10x-2=-2(-5x+1)=-2(1-5x)$.
Il vient alors :

$$\begin{aligned}h(x)&=\frac{1-5x}{\left(5x^2-2x+5\right)^{11}}\\&=(1-5x)\left(5x^2-2x+5\right)^{-11}\\&=\frac{1}{-2}\times(-2)(1-5x)\left(5x^2-2x+5\right)^{-11}\\&=-\frac{1}{2}u'(x)u^{-11}(x)\end{aligned}.$$

Or, pour tout entier n différent de -1, la fonction $u'u^n$ admet la fonction $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$ comme primitive. On en déduit que la fonction $x \mapsto u'(x)u^{-11}(x)$ admet comme primitive la fonction $x \mapsto \frac{1}{-10}u^{-10}(x)$, c'est à dire : $x \mapsto \frac{-1}{10\left(5x^2-2x+5\right)^{10}}$.

Finalement, pour obtenir une primitive de la fonction *h*, il suffit de multiplier la fonction que nous venons d'obtenir par $-\frac{1}{2}$:

$$x \mapsto \frac{1}{20\left(5x^2-2x+5\right)^{10}}$$

Résultat final

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction *h* définie par $h(x)=\frac{1-5x}{\left(5x^2-2x+5\right)^{11}}$

est la fonction définie par :

$$x \mapsto \frac{1}{20\left(5x^2-2x+5\right)^{10}}$$