

Déterminer une primitive de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{5x^2 + 7}}$$

Analyse

La fonction f est, à un facteur multiplicatif près, le rapport de la dérivée d'une fonction et de sa racine carrée ...

Résolution

Considérons la fonction polynôme u définie sur \mathbb{R} par :

$$u : x \mapsto 5x^2 + 7$$

En tant que fonction polynôme, elle est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée u' s'écrit :

$$u : x \mapsto 10x$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x}{\sqrt{5x^2 + 7}} \\ &= \frac{3}{10} \frac{10x}{\sqrt{5x^2 + 7}} \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \end{aligned}$$

Or, la fonction $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ admet la fonction $2\sqrt{u}$ comme primitive. On en déduit que la fonction

$x \mapsto \frac{10x}{\sqrt{5x^2 + 7}}$ admet la fonction $x \mapsto 2\sqrt{5x^2 + 7}$ comme primitive.

Finalement, pour obtenir une primitive de la fonction f , il suffit de multiplier la fonction que nous venons d'obtenir par $\frac{3}{10}$:

$$x \mapsto \frac{3}{5} \sqrt{5x^2 + 7}$$

Résultat final

Une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{5x^2 + 7}}$
est la fonction définie par :

$$x \mapsto \frac{3}{5} \sqrt{5x^2 + 7}$$