

Déterminer une primitive de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

---

## Analyse

La fonction  $f$  est, à un facteur multiplicatif près, le rapport de la dérivée d'une fonction et de sa racine carrée ...

---

## Résolution

Considérons la fonction polynôme  $u$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$u : x \mapsto x^2 + 1$$

En tant que fonction polynôme, elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée  $u'$  s'écrit :

$$u : x \mapsto 2x$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \end{aligned}$$

Or, la fonction  $\frac{u'}{\sqrt{u}}$  admet la fonction  $2\sqrt{u}$  comme primitive. On en déduit que la fonction

$x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$  admet la fonction  $x \mapsto 2\sqrt{x^2 + 1}$  comme primitive.

Finalement, pour obtenir une primitive de la fonction  $f$ , il suffit de multiplier la fonction que nous venons d'obtenir par  $\frac{1}{2}$  :

$$x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$$

---

## Résultat final

Une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

est la fonction définie par :

$$x \mapsto \sqrt{x^2+1}$$