Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{8x-2x^2}{(x-2)^2}$$

a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f ;

b. Déterminer le signe de la fonction f sur $\mathscr{D}_f$;

c. Déterminer les réels u et v tels que pour tout x de $\mathscr{D}_f$ on ait :

$$f(x)=u+\frac{v}{(x-2)^2}$$

d. Déterminer les primitives de la fonction f sur $]2\,;+\infty[$;

e. Déterminer la primitive G de la fonction f sur $]-\infty\,;2[$ qui vérifie la condition : $G(-2)=3$.

Analyse

L'objectif de cet exercice est fondamentalement la détermination d'une primitive d'une fonction rationnelle. Ainsi, la question c. s'avère-t-elle être une question essentielle. Les autres questions sont plus classiques.

Résolution

Question a.

La fonction f est une fonction rationnelle. Il convient donc de déterminer les éventuelles valeurs de x qui annulent son dénominateur.

On doit résoudre : $(x-2)^2=0$.

Cette équation équivaut à : $x-2=0$. La seule solution est donc : $x=2$.

Finalement :

$$\boxed{\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}=]-\infty\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[}$$

Question b.

Le dénominateur de la fonction *f* est positif en tant que carré.

Le signe de la fonction *f* est donc celui de son numérateur.

Pour tout x réel, on a : $8x-2x^2=2x(4-x)$.

On en déduit alors immédiatement le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$2x$		-	0	+		+		+	
$4-x$		+		+		+	0	-	
$2x(4-x)$		-	0	+		+	0	-	
$f(x)$		-	0	+	||	+	0	-	

Finalement on a :

$$\boldsymbol{f(x)>0 \text{ pour } x\in\left]0;2\right[\cup\left]2;4\right[}$$
$$\boldsymbol{f(x)=0 \text{ pour } x=0 \text{ ou } x=4}$$
$$\boldsymbol{f(x)<0 \text{ pour } x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]4;+\infty\right[}$$

Question c.

On peut procéder de diverses manières.

1ère approche : on fait apparaître $(x-2)^2$ au numérateur.

Pour tout x de $\mathscr{D}_f$:

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{8x-2x^2}{(x-2)^2}=\frac{-2(x^2-4x)}{(x-2)^2}=\frac{-2\left[(x-2)^2-4\right]}{(x-2)^2}\\&=\frac{-2(x-2)^2+8}{(x-2)^2}=\frac{-2(x-2)^2}{(x-2)^2}+\frac{8}{(x-2)^2}\\&=-2+\frac{8}{(x-2)^2}\end{aligned}$$

Cette approche requiert de bien maîtriser la mise sous forme canonique d'une fonction polynôme du second degré.

2ème approche : identification.

Pour tout x de $\mathcal{D}_f$:

$$\begin{aligned} u+\frac{v}{(x-2)^2} &= \frac{u(x-2)^2}{(x-2)^2}+\frac{v}{(x-2)^2} \\ &= \frac{u(x-2)^2+v}{(x-2)^2} \\ &= \frac{ux^2-4ux+4u+v}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

On souhaite que cette dernière expression soit égale, pour tout x de $\mathcal{D}_f$ à : $\dfrac{8x-2x^2}{(x-2)^2}$.

Par identification des coefficients des polynômes des numérateurs, il vient :

$$\begin{cases} u=-2 \\ -4u=8 \\ 4u+v=0 \end{cases}$$

Les deux premières équations fournissent $u=-2$ et la troisième donne alors $v=8$.

Finalement :

Pour tout x de $\mathcal{D}_f$, on a : $f(x)=-2+\dfrac{8}{(x-2)^2}$.

Les réels u et v cherchés sont respectivement égaux à -2 et 8.

Question d.

L'expression de f obtenue à la question précédente va nous permettre d'en déterminer les primitives sur $]2\,;+\infty[$, comme intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$.

- $x\mapsto -2$ admet $x\mapsto -2x$ comme primitive sur $\mathbb{R}$;
- $x\mapsto \dfrac{1}{(x-2)^2}$ admet $x\mapsto -\dfrac{1}{x-2}$ comme primitive sur $]2\,;+\infty[$.

  On en déduit que la fonction $x\mapsto \dfrac{8}{(x-2)^2}$ admet donc $x\mapsto -\dfrac{8}{x-2}$ comme primitive sur $]2\,;+\infty[$.

On en déduit que la fonction : $x \mapsto -2x - \frac{8}{x-2}$ est une primitive de la fonction f sur $]2\,;+\infty[$.

Finalement :

Les primitives de la fonction f sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$ sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto -2x - \frac{8}{x-2} + k$$

où k est une constante réelle quelconque.

Question e.

On cherche la primitive G de la fonction f sur $]-\infty\,;2[$ qui vérifie $\mathrm{G}(-2)=3$.
Les primitives de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$ sont de la même forme que celles que nous avons déterminées à la question précédente sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

On peut donc écrire $\mathrm{G}(x)$ de la forme : $\mathrm{G}(x) = -2x - \frac{8}{x-2} + k$.

La condition $\mathrm{G}(-2)=3$ équivaut alors à : $-2\times(-2) - \frac{8}{-2-2} + k = 3$.

Il vient alors : $4+2+k=3$.
D'où : $k=-3$.

Finalement :

La primitive G de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$ qui vérifie la condition $\mathrm{G}(-2)=3$ est définie par :

pour tout x de $]-\infty\,;2[$, $\mathrm{G}(x) = -2x - \frac{8}{x-2} - 3$.