Montrer que la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\Phi(x)=\frac{x^3\sqrt{x}}{x+1}$$

est une primitive sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction φ définie par :

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\frac{x^2(5x+7)\sqrt{x}}{(x+1)^2}$$

Analyse

L'exercice ne pose pas difficulté particulière mais requiert de la précision dans les calculs.

Résolution

Dire que la fonction Φ est une primitive de la fonction φ sur $\mathbb{R}^+$ équivaut à :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \Phi'(x)=\varphi(x)$$

Il convient donc de dériver la fonction Φ.

Pour tout réel x positif, on a : $\Phi(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=x^3\sqrt{x}$ et $v(x)=x+1$.

On aura, classiquement : $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \Phi'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

Le calcul de $v'(x)$ ne pose pas de difficulté. Celui de $u'(x)$ est un plus délicat.

On a, pour tout réel x positif :

$$\begin{aligned}u'(x)&=3x^2\sqrt{x}+x^3\frac{1}{2\sqrt{x}}=3x^2\sqrt{x}+\frac{x^2\sqrt{x}\cancel{\sqrt{x}}}{2\cancel{\sqrt{x}}}\\&=3x^2\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2\sqrt{x}=\frac{7}{2}x^2\sqrt{x}\end{aligned}$$

Il vient alors, en tenant compte de $v'(x)=1$:

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \frac{\frac{7}{2}x^2\sqrt{x}\times(x+1)-x^3\sqrt{x}\times 1}{(x+1)^2}\\ &= \frac{1}{2}x^2\sqrt{x}\,\frac{7(x+1)-2x}{(x+1)^2}\\ &= \frac{1}{2}x^2\sqrt{x}\,\frac{5x+7}{(x+1)^2}\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{x^2(5x+7)\sqrt{x}}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

On retrouve l'expression de $\varphi(x)$.

Résultat final

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \Phi'(x)=\varphi(x)$$

La fonction Φ est une primitive de la fonction φ sur $\mathbb{R}^+$.