Déterminer une primitive de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$f(x)=\frac{-5+x\sqrt{x}^3}{3\sqrt{x}}$$

Analyse

On ne doit pas se laisser dérouter par l'apparente complexité de l'expression ...

Résolution

On a : $\sqrt{x}^3=\sqrt{x}^2\times\sqrt{x}=x\times\sqrt{x}=x\sqrt{x}$.

Il vient alors :

$$f(x)=\frac{-5+x\sqrt{x}^3}{3\sqrt{x}}=\frac{-5+x\times x\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}=\frac{-5}{3\sqrt{x}}+\frac{x^2\cancel{\sqrt{x}}}{3\cancel{\sqrt{x}}}=-\frac{5}{3}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{3}x^2$$

On a donc affaire à des fonctions « classiques » et on peut facilement faire apparaître des dérivées dans l'expression obtenue :

$$f(x)=-\frac{5}{3}\times 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 3x^2=-\frac{10}{3}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{9}\times 3x^2$$

La fonction $x\mapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$ admet comme primitive la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ et la fonction $x\mapsto 3x^2$ admet comme primitive la fonction $x\mapsto x^3$.

La fonction *f* admet donc comme primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ la fonction *F* définie par :

$$F(x)=-\frac{10}{3}\times\sqrt{x}+\frac{1}{9}\times x^3$$

Résultat final

La fonction $F : x \mapsto -\frac{10}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{9}x^3$ est une primitive

de la fonction $f : x \mapsto \frac{-5 + x\sqrt{x}^3}{3\sqrt{x}}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$.