Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par :

$$F(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$$

est une primitive sur $\mathbb{R}^{*+}$ de la fonction f définie par :

$$f(x)=x\sqrt{x}$$

Analyse

Il suffit de dériver la fonction F … et de comparer le résultat obtenu à la fonction f.

Résolution

La fonction f est un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{*+}$. Pour tout réel x strictement positif on a alors :

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{2}{5}\left(2x\times\sqrt{x}+x^2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\\
&= \frac{2}{5}\left(2x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2\sqrt{x}}\right)\\
&= \frac{2}{5}\times\frac{2x\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}+x^2}{2\sqrt{x}}\\
&= \frac{2}{5}\times\frac{4x\overbrace{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}^{x}+x^2}{2\sqrt{x}}\\
&= \frac{2}{5}\times\frac{4x^2+x^2}{2\sqrt{x}}\\
&= \frac{2}{5}\times\frac{5x^2}{2\sqrt{x}}\\
&= \frac{x^2}{\sqrt{x}}\\
&= \frac{x\times\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\\
&= x\sqrt{x}
\end{aligned}$$

Résultat final

La fonction $F : x \mapsto \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.