Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \cos x \cos(2x)$$

Analyse

Le premier facteur peut-être interprété comme l'expression d'une dérivée. On peut alors raisonnablement envisager de transformer le facteur $\cos(2x)$, deux formules relatives au cosinus de l'angle double étant disponibles …

Résolution

On a, pour tout réel x réel :

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

La fonction cosinus étant la dérivée de la fonction sinus, c'est la deuxième expression qui s'avère être la plus intéressante. Pour tout x réel, il vient :

$$f(x) = \cos x \cos(2x) = \cos x\left(1 - 2\sin^2 x\right) = \cos x - 2\cos x \sin^2 x$$

En posant : $u(x) = \sin x$, on a : $u'(x) = \cos x$ et $f(x)$ se récrit :

$$f(x) = u'(x) - 2u'(x)u^2(x)$$

D'où, en notant F une primitive quelconque de f sur $\mathbb{R}$:

$$F(x) = u(x) - 2\times\frac{1}{3}u^3(x) + C = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

Résultat final

La fonction $f : x \mapsto \cos x \cos(2x)$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$x \mapsto \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + C$$

où C est une constante réelle quelconque.