On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}-\{3\}$ par :

$$f(x)=\frac{x(-2x+17)}{(x-3)^4}$$

1. Déterminer trois réels *a*, *b* et *c* tels que pour tout réel *x* de $\mathbb{R}-\{3\}$ on ait :

$$f(x)=\frac{a}{(x-3)^2}+\frac{b}{(x-3)^3}+\frac{c}{(x-3)^4}$$

2. Déduire de la question précédente les primitives de *f* sur l'intervalle $]3;+\infty[$.

Analyse

La première question permet de transformer la fonction *f* en effectuant une « décomposition en éléments simples » à savoir les fonctions $x\mapsto\frac{a}{(x-3)^2}$, $x\mapsto\frac{b}{(x-3)^3}$ et $x\mapsto\frac{c}{(x-3)^3}$. Ces trois fonctions sont aisées à intégrer sur l'intervalle considéré.

Résolution

Question 1.

On a, pour tout réel *x* réel différent de 3 :

$$\begin{aligned}\frac{a}{(x-3)^2}+\frac{b}{(x-3)^3}+\frac{c}{(x-3)^4}&=\frac{a(x-3)^2+b(x-3)+c}{(x-3)^4}\\&=\frac{ax^2-6ax+9a+bx-3b+c}{(x-3)^4}\\&=\frac{ax^2+(-6a+b)x+9a-3b+c}{(x-3)^4}\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}-\{3\},\ f(x)=\frac{a}{(x-3)^2}+\frac{b}{(x-3)^3}+\frac{c}{(x-3)^4} \Leftrightarrow$$
$$\forall x \in \mathbb{R}-\{3\},\ f(x)=\frac{ax^2+(-6a+b)x+9a-3b+c}{(x-3)^4} \Leftrightarrow$$
$$\forall x \in \mathbb{R}-\{3\},\ \frac{x(-2x+17)}{(x-3)^4}=\frac{ax^2+(-6a+b)x+9a-3b+c}{(x-3)^4} \Leftrightarrow$$
$$\forall x \in \mathbb{R}-\{3\},\ -2x^2+17x=ax^2+(-6a+b)x+9a-3b+c$$

Soit, par identification :

$$\begin{cases} a=-2 \\ -6a+b=17 \\ 9a-3b+c=0 \end{cases}$$

On obtient facilement :

$$\begin{cases} a=-2 \\ -6a+b=17 \\ 9a-3b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=17+6a \\ c=-9a+3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=17-12 \\ c=18+3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=5 \\ c=18+15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=5 \\ c=33 \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}-\{3\},\ f(x)=\frac{-2}{(x-3)^2}+\frac{5}{(x-3)^3}+\frac{33}{(x-3)^4}}$$

Question 2.

Dans cette question, nous travaillons sur l'intervalle $]3;+\infty[$. D'après la question précédente, nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R}-\{3\},\ f(x)=\frac{-2}{(x-3)^2}+\frac{5}{(x-3)^3}+\frac{33}{(x-3)^4}=-2(x-3)^{-2}+5(x-3)^{-3}+33(x-3)^{-4}$$

On peut alors déterminer les primitives de f sur l'intervalle considéré. Si nous notons F l'une d'elles, nous avons pour tout x de $]3;+\infty[$:

$$\begin{aligned}
F(x) &= -2\times\frac{1}{-2+1}(x-3)^{-2+1} + 5\times\frac{1}{-3+1}(x-3)^{-3+1} + 33\times\frac{1}{-4+1}(x-3)^{-4+1} + C \\
&= \frac{-2}{-1}(x-3)^{-1} + \frac{5}{-2}(x-3)^{-2} + \frac{33}{-3}(x-3)^{-3} + C \\
&= \frac{2}{x-3} - \frac{5}{2}\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{11}{(x-3)^3} + C \\
&= \frac{4(x-3)^2 - 5(x-3) - 22}{2(x-3)^3} + C \\
&= \frac{4x^2 - 24x + 36 - 5x + 15 - 22}{2(x-3)^3} + C \\
&= \boxed{\frac{4x^2 - 29x + 29}{2(x-3)^3} + C}
\end{aligned}$$

où C est une constante réelle quelconque.

Résultat final

La fonction $f : x \mapsto \frac{x(-2x+17)}{(x-3)^4} = \frac{-2}{(x-3)^2} + \frac{5}{(x-3)^3} + \frac{33}{(x-3)^4}$ admet pour primitives sur $]3;+\infty[$ les fonctions définies par :

$$x \mapsto \frac{4x^2 - 29x + 29}{2(x-3)^3} + C$$

où C est une constante réelle quelconque.