

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

1. La fonction  $f$  admet-elle des primitives sur  $\mathbb{R}$  ?
2. Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . On définit les fonctions  $g$  et  $h$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = F(x^3 + 1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, h(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$$

Déterminer les variations des fonctions  $g$  et  $h$ .

---

## Analyse

Si les variations de  $F$  sont connues, alors on aura facilement celles de  $g$  et  $h$  ...

---

## Résolution

1. La fonction  $f$  est une fonction rationnelle définie sur  $\mathbb{R}$  (pour tout  $x$  réel, on a  $x^2 + 1 > 0$ ).  
A ce titre, elle est continue sur tout intervalle de  $\mathbb{R}$ , en particulier, sur  $\mathbb{R}$  lui-même.  
En tant que fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , elle admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $f$  admet des primitives sur  $\mathbb{R}$  en tant que fonction continue sur cet ensemble.

2. Soit  $F$  une primitive de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Par définition, on a :  $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$ .  
On a également :  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$  et donc :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ .  
On en déduit que la fonction  $F$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $x \rightarrow x^3 + 1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que fonction polynôme. Sa dérivée est la fonction  $x \mapsto 3x^2$  qui prend des valeurs strictement positives pour tout réel  $x$  non nul et s'annule pour  $x = 0$ . La fonction  $x \rightarrow x^3 + 1$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $g$  est donc la composée de deux fonctions strictement croissantes sur  $\mathbb{R}$ , elle est donc elle-même strictement croissante sur cet intervalle.

La fonction  $g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction inverse est strictement décroissante sur tout intervalle de son ensemble de définition  $\mathbb{R}^*$  et donc, en particulier sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . La fonction  $h$  est donc la composée d'une fonction strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et d'une fonction (la fonction  $F$ ) strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Elle est donc strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

La fonction  $h$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

---

## Résultat final

La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$$

admet des primitives sur  $\mathbb{R}$  en tant que fonction continue sur cet intervalle.

Les fonctions  $g$  et  $h$  définies respectivement sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^{+*}$  par :

$$g : x \mapsto F(x^3 + 1)$$

$$h : x \mapsto F\left(\frac{1}{x}\right)$$

sont alors respectivement strictement croissante et décroissante sur ces ensembles.