

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$$

1. La fonction f admet-elle des primitives sur \mathbb{R} (on justifiera soigneusement la réponse) ?

On note F la primitive de f sur \mathbb{R} vérifiant $F(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

On définit alors la fonction g sur $I = \left] -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} ; \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right[$ par :

$$\forall x \in I, g(x) = F\left(\sqrt{2} \tan(\sqrt{2}x)\right)$$

2. La fonction g est-elle dérivable sur I (on justifiera soigneusement la réponse) ?
3. Montrer que l'on a, pour tout x de I : $g'(x) = 1$.
4. Dédire de ce qui précède l'expression de $g(x)$ pour tout x de I .

Analyse

Un exercice qui mêle les variations sur le thème (majeur ici) du calcul de primitives et celui (moins important mais ...) de la dérivation. La structure générale en est classique : on propose une fonction, simple, dont les primitives ne sont pas connues en Terminale S puis on la compose avec une autre fonction simple de sorte que la dérivée de la composée soit ... très simple et permette une intégration !

Résolution

1. La fonction f est une fonction rationnelle. Elle est donc continue sur tout intervalle de son domaine de définition, en particulier sur \mathbb{R} . Puisque la fonction f est continue sur \mathbb{R} , on en déduit :

f admet des primitives sur \mathbb{R} .

2. La fonction g est la composée sur I de la fonction $x \mapsto \sqrt{2} \tan(\sqrt{2}x)$ et de la fonction F .

a. La fonction $x \mapsto \sqrt{2} \tan(\sqrt{2}x)$ est dérivable sur I comme composée de :

1. La fonction $x \mapsto \sqrt{2}x$ linéaire, dérivable sur \mathbb{R} et, à fortiori, sur I , et prenant ses valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

2. La fonction tangente dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et prenant ses valeurs dans \mathbb{R} .

3. La fonction $x \mapsto \sqrt{2}x$ dérivable sur \mathbb{R} et prenant ses valeurs dans \mathbb{R} .

b. La fonction F , dérivable sur \mathbb{R} .

De ce qui précède, on déduit :

La fonction g est dérivable sur I .

3. Pour tout x de I , on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times (1 + \tan^2(\sqrt{2}x)) \times \frac{1}{(\sqrt{2} \tan(\sqrt{2}x))^2 + 2} \\ &= 2 \times (1 + \tan^2(\sqrt{2}x)) \times \frac{1}{2 \tan^2(\sqrt{2}x) + 2} \\ &= 2 \times (1 + \tan^2(\sqrt{2}x)) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\tan^2(\sqrt{2}x) + 1} \\ &= \frac{1 + \tan^2(\sqrt{2}x)}{\tan^2(\sqrt{2}x) + 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}; \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right[, g'(x) = 1$

4. D'après la question précédente, on peut écrire $g(x) = x + C$ où C est une constante réelle à déterminer. C'est la condition $F(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}$ qui va nous permettre de le faire.

Comme on a : $\forall x \in I, g(x) = F(\sqrt{2} \tan(\sqrt{2}x))$, nous cherchons un réel x dans

$$\left] -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}; \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right[\text{ tel que : } \tan(\sqrt{2}x) = 1.$$

On a immédiatement :

$$\tan(\sqrt{2}x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + k \frac{\pi}{\sqrt{2}}, k \in \mathbb{Z}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + k \frac{\pi}{\sqrt{2}} \in \left] -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}; \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right[&\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + k \frac{\pi}{\sqrt{2}} < \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k = 0 \end{aligned}$$

Finalement, avec $x = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$, il vient :

$$g\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right) = F\left(\sqrt{2} \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = F(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}$$

Mais on a également : $g\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + C$.

On tire de ce qui précède : $\frac{\pi}{4\sqrt{2}} + C = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

Il vient : $C = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{12\sqrt{2}}$.

Finalement :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}; \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right[, g(x) = x + \frac{\pi}{12\sqrt{2}}$$