Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{F}(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

est une primitive sur l'intervalle $]1;+\infty[$ de la fonction *f* définie par :

$$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

Analyse

Un exercice classique où l'on s'assurera de la dérivabilité de F sur l'intervalle considéré et où on dérivera F pour obtenir *f*.

Résolution

Les fonctions qui apparaissent au numérateur et au dénominateur de la fonction F sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ du fait de la présence de la racine carrée. La différence $\sqrt{x}-1$ du dénominateur impose que *x* soit différent de 1. On en déduit finalement que la fonction F est bien dérivable sur l'intervalle $]1;+\infty[$ (de ce qui précède, on déduit qu'elle l'est aussi sur l'intervalle $]0;1[$).

Pour tout *x* réel de l'intervalle $]1;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(\sqrt{x}+1\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1-\left(\sqrt{x}+1\right)\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1-\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(-2)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} = \frac{\frac{-1}{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} = \frac{-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Résultat final

La fonction F définie par $\mathrm{F}(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ est une primitive sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ de la fonction *f* définie par : $f(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$.