Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$ par :

$$\mathrm{F}(x)=\frac{x^2-\frac{1}{4}}{2x+1}$$

est une primitive sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$ de la fonction *f* définie par :

$$f(x)=\frac{1}{2}$$

Analyse

Un exercice classique où l'on peut s'assurer de la dérivabilité de F sur l'intervalle considéré puis dériver F pour obtenir *f*. On peut également commencer par factoriser le numérateur, la différence des deux carrés n'étant pas particulièrement difficile à détecter …

Résolution

1ère approche

Les fonctions F est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Elle est donc dérivable sur tout intervalle de cet ensemble, en particulier sur $\left]-\frac{1}{2}\,;-\infty\right[$.

Pour tout *x* réel de l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;-\infty\right[$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{F}'(x)&=\frac{2x(2x+1)-\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\times 2}{(2x+1)^2}=\frac{2x^2+2x+\frac{1}{2}}{(2x+1)^2}=\frac{\frac{1}{2}\left(4x^2+4x+1\right)}{(2x+1)^2}\\&=\frac{1}{2}\frac{(2x+1)^2}{(2x+1)^2}=\frac{1}{2}=f(x)\end{aligned}$$

2ème approche

On a : $x^2-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$. D'où, pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};-\infty\right[$:

$$\mathrm{F}(x)=\frac{x^2-\frac{1}{4}}{2x+1}=\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2x+1}=\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

La fonction F est donc affine sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};-\infty\right[$. Elle y est donc dérivable et on a :

On a alors immédiatement : $\mathrm{F}'(x)=\frac{1}{2}=f(x)$.

Résultat final

La fonction F définie par $\mathrm{F}(x)=\frac{x^2-\frac{1}{4}}{2x+1}$ est une primitive sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};-\infty\right[$ de la fonction *f* définie par : $f(x)=\frac{1}{2}$.