Déterminer :

$$\int \frac{dx}{x^4\left(x^3+1\right)^2}$$

Analyse

La fonction à intégrer est une fonction rationnelle. On commence donc par déterminer les intervalles d'intégrabilité en déterminant les pôles de cette fonction. On peut alors effectuer, classiquement, une décomposition en éléments simples mais en y regardant de plus près, un changement de variable permet d'aller plus vite …

Résolution

On a $x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Par ailleurs : $\left(x^3+1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x^3+1=0 \Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)=0 \Leftrightarrow x+1=0$ (le trinôme x^2-x+1 ne s'annule pas dans $\mathbb{R}$).

Les pôles de la fonction rationnelle $x \mapsto \dfrac{1}{x^4\left(x^3+1\right)^2}$ sont donc -1 et 0.

Les intervalles d'intégrabilité sont donc : $\left]-\infty\,;-1\right[$, $\left]-1\,;0\right[$ et $\left]0\,;+\infty\right[$.

On travaille donc désormais sur l'un quelconque de ces intervalles, noté I.

Le facteur $\dfrac{1}{x^4}$ nous fait penser, à une facteur près, à la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$.

On a : $d\left(\dfrac{1}{x^3}\right) = -3\dfrac{dx}{x^4}$

Pour tout x réel dans I, on a ensuite :

$$x \mapsto \frac{1}{x^4\left(x^3+1\right)^2} = \frac{1}{x^4\left(x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)\right)^2} = \frac{1}{x^4 \times x^6 \times \left(1+\frac{1}{x^3}\right)^2}$$

D'où : $\int \frac{dx}{x^4\left(x^3+1\right)^2} = \int \frac{dx}{x^4 \times x^6 \times \left(1+\frac{1}{x^3}\right)^2} = -\frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^2} d\left(\frac{1}{x^3}\right)$

On effectue alors naturellement le changement de variable $u = \frac{1}{x^3}$:

$$\int \frac{dx}{x^4\left(x^3+1\right)^2} = -\frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^2} d\left(\frac{1}{x^3}\right) = -\frac{1}{3}\int \frac{u^2}{(1+u)^2} du$$

Il vient :

$$\int \frac{u^2}{(1+u)^2} du = \int \frac{(1+u)^2 - 2u - 1}{(1+u)^2} du = \int \left(1 - \frac{2u+1}{(1+u)^2}\right) du$$

On a la décomposition en éléments simples : $\frac{2u+1}{(1+u)^2} = \frac{a}{1+u} + \frac{b}{(1+u)^2}$.

On obtient facilement (par exemple en réduisant au même dénominateur puis en identifiant les deux expressions) : $\frac{2u+1}{(1+u)^2} = \frac{2}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^2}$. Alors :

$$\int \frac{u^2}{(1+u)^2} du = \int \left(1 - \frac{2u+1}{(1+u)^2}\right) du = \int \left(1 - \frac{2}{1+u} + \frac{1}{(1+u)^2}\right) du = u - 2\ln|1+u| - \frac{1}{1+u} + C$$

En revenant à la variable initiale :

$$\int \frac{dx}{x^4\left(x^3+1\right)^2} = -\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{x^3} - 2\ln\left|1+\frac{1}{x^3}\right| - \frac{1}{1+\frac{1}{x^3}}\right\} + C = -\frac{1}{3x^3} + \frac{2}{3}\ln\left|1+\frac{1}{x^3}\right| + \frac{1}{3}\frac{x^3}{x^3+1} + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

Résultat final

$$\int \frac{dx}{x^4\left(x^3+1\right)^2} = -\frac{1}{3x^3} + \frac{2}{3}\ln\left|1+\frac{1}{x^3}\right| + \frac{1}{3}\frac{x^3}{x^3+1} + C$$

où C est une constante réelle quelconque.