Déterminer :

$$\int \frac{x\times\ln|x|}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

Analyse

La fonction à intégrer comporte une « partie » rationnelle aisée à intégrer. Quant au logarithme népérien, il se dérive selon une fonction rationnelle. On doit ainsi « assez naturellement » penser à mener une intégration par parties.

Résolution

Du fait du facteur $\ln|x|$, on travaille sur tout intervalle I privé de 0.

Sur un tel intervalle, on pose :

- $u(x)=\ln|x|$ qui est dérivable de dérivée $u'(x)=\frac{1}{x}$ continue sur I.
- $v'(x)=\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}=x\left(1+x^2\right)^{-2}$ qui admet pour primitive sur I :

  $v(x)=-\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$.

L'intégration par parties donne alors :

$$\begin{aligned}\int \frac{x\times\ln|x|}{\left(1+x^2\right)^2}dx &= -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\times\ln|x|-\int\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\right)\times\frac{1}{x}dx\\ &= -\frac{1}{2}\frac{\ln|x|}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}dx\end{aligned}$$

On a : $\int\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}dx=\int\frac{x\,dx}{x^2\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2\right)}{x^2\left(1+x^2\right)}$ et on est ainsi conduit à effectuer le changement de variable $u=x^2$ qui est bien bijectif puisque sur tout intervalle I ne contenant pas 0, x garde un signe constant (on aura donc $x=\pm\sqrt{u}$ suivant que x est strictement positif ($\mathrm{I}\subset\mathbb{R}_+^*$) ou strictement négatif ($\mathrm{I}\subset\mathbb{R}_-^*$)).

On a donc :

$$\int \frac{1}{x\left(1+x^2\right)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{x^2\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u\left(1+u\right)} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln|u| - \ln|1+u|\right) + C = \frac{1}{2}\left(\ln x^2 - \ln\left(1+x^2\right)\right) + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

Finalement :

$$\int \frac{x\times\ln|x|}{\left(1+x^2\right)^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{\ln|x|}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x\left(1+x^2\right)}dx$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\ln|x|}{1+x^2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C$$
$$= -\frac{\ln|x|}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

Résultat final

$$\int \frac{x\times\ln|x|}{\left(1+x^2\right)^2}dx = -\frac{\ln|x|}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C$$

où C est une constante réelle quelconque.