Déterminer :

$$\int \frac{t^3 \arccos(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Analyse

Un exercice où, cela va de soi, il peut être très utile de connaître la dérivée de la fonction arccos ! Pour autant, on ne se précipitera pas nécessairement : le facteur « t^3 » du numérateur requiert un peu d'attention …

Résolution

Du fait de la racine au dénominateur, on doit avoir $1-t^2>0$ c'est-à-dire $t\in\left]-1\,;+1\right[$. Il n'y a alors aucun problème au numérateur puisque la fonction arccos requiert $t\in\left[-1\,;+1\right]$.
On travaille donc sur un intervalle $\mathrm{I}\subset\left]-1\,;+1\right[$.

Rappelons que la dérivée, sur un tel intervalle, de la fonction arccos est la fonction $t\mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

On peut essayer d'en tirer immédiatement parti. Il vaut cependant mieux essayer de se débarrasser du facteur « t^3 » du dénominateur :

$$\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}=-\frac{\left(1-t^2\right)t-t}{\sqrt{1-t^2}}=-t\sqrt{1-t^2}+\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

Il vient alors : $\int \frac{t^3\arccos(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=-\int t\sqrt{1-t^2}\arccos(t)\,dt+\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arccos(t)\,dt$.

→ Détermination de $\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arccos(t)\,dt$

Soit $u:t\mapsto\arccos(t)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I et de dérivée $t\mapsto-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ sur cet intervalle.

$v':t\mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}=t\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ continue sur I et admettant pour primitive

$v:t\mapsto -\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{1-t^2}$.

Une intégration par parties nous donne alors :

$$\begin{aligned}\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arccos(t)\,dt &= -\sqrt{1-t^2}\arccos(t)-\int\left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)\left(-\sqrt{1-t^2}\right)dt\\ &= -\sqrt{1-t^2}\arccos(t)-\int dt\\ &= -\sqrt{1-t^2}\arccos(t)-t+C_1\end{aligned}$$

où C_1 est une constante réelle quelconque.

→ Détermination de $\int t\sqrt{1-t^2}\arccos(t)\,dt$

Soit $u:t\mapsto \arccos(t)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I et de dérivée $t\mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ sur cet intervalle.

$v':t\mapsto t\sqrt{1-t^2}=t\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}$ continue sur I et admettant pour primitive

$v:t\mapsto -\dfrac{1}{3}\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{3}\sqrt{1-t^2}\left(1-t^2\right)$.

Une intégration par parties nous donne alors :

$$\begin{aligned}\int t\sqrt{1-t^2}\arccos(t)\,dt &= -\frac{1}{3}\sqrt{1-t^2}\left(1-t^2\right)\arccos(t)-\int\left(-\frac{1}{3}\sqrt{1-t^2}\left(1-t^2\right)\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt\\ &= -\frac{1}{3}\sqrt{1-t^2}\left(1-t^2\right)\arccos(t)-\frac{1}{3}\int\left(1-t^2\right)dt\\ &= -\frac{1}{3}\sqrt{1-t^2}\left(1-t^2\right)\arccos(t)-\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{3}t^3\right)+C_2\\ &= -\frac{1}{3}\sqrt{1-t^2}\left(1-t^2\right)\arccos(t)-\frac{1}{9}\left(3t-t^3\right)+C_2\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\int \frac{t^3 \arccos(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= -\int t\sqrt{1-t^2}\arccos(t)\,dt + \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arccos(t)\,dt\\ &= \frac{1}{3}\sqrt{1-t^2}\left(1-t^2\right)\arccos(t) + \frac{1}{9}\left(3t-t^3\right) + C_2 - \sqrt{1-t^2}\arccos(t) - t + C_1\\ &= -\frac{1}{9}\left(6t+t^3\right) - \frac{1}{3}\left(2+t^2\right)\sqrt{1-t^2}\arccos(t) + C\end{aligned}$$

où C est une constante réelle quelconque.

Résultat final

$$\int \frac{t^3 \arccos(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\frac{1}{9}\left(6t+t^3\right) - \frac{1}{3}\left(2+t^2\right)\sqrt{1-t^2}\arccos(t) + C$$

où C est une constante réelle quelconque.