

Déterminer :

$$\int \frac{x^2 + a}{x^2 + 1} \arctan x \, dx$$

où  $a$  est un réel quelconque.

---

## Analyse

Dans cet exercice, il est essentiel de connaître la dérivée de la fonction  $\arctan$  ! Mais il convient également de savoir effectuer (même si l'on n'est pas obligé ici de l'appeler comme ça ! 😊) la division euclidienne de «  $x^2 + a$  » par «  $x^2 + 1$  » ...

---

## Résolution

Notons d'abord que, pour tout  $a$  réel, la fonction  $x \mapsto \frac{x^2 + a}{x^2 + 1} \arctan x$  est continue sur  $\mathbb{R}$  comme produit de deux fonctions (une fonction rationnelle et la fonction  $\arctan$ ) définies et continues sur cet intervalle. Ainsi, elle admet des primitives sur tout intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $a$  un réel quelconque fixé.

Pour tout  $x$  réel, on a :  $\frac{x^2 + a}{x^2 + 1} \arctan x = \frac{x^2 + 1 + a - 1}{x^2 + 1} \arctan x = \arctan x + (a - 1) \frac{\arctan x}{x^2 + 1}$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{\arctan x}{x^2 + 1}$  est de la forme  $x \mapsto u'(x)u(x)$  avec  $u(x) = \arctan x$ . Ses primitives sur tout intervalle de  $\mathbb{R}$  sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \frac{1}{2}(u(x))^2 + C = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$$

où  $C$  est une constante réelle quelconque.

Pour déterminer les primitives de la fonction  $\arctan$ , on procède classiquement à une intégration par parties en posant  $u(x) = \arctan(x)$ , qui donne  $u'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ , et  $v'(x) = 1$  dont une primitive est  $v(x) = x$ .

On a alors :

$$\begin{aligned}\int \arctan(x) dx &= x \times \arctan(x) - \int \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= x \times \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx \\ &= x \times \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C' \\ &= x \times \arctan x + \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C'\end{aligned}$$

où  $C'$  est une constante réelle quelconque.

Finalement :

$$\int \frac{x^2+a}{x^2+1} \arctan(x) dx = x \times \arctan x + \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{a-1}{2} (\arctan x)^2 + k$$

où  $k$  est une constante réelle quelconque.

---

## Résultat final

$$\int \frac{x^2+a}{x^2+1} \arctan(x) dx = \left( x + \frac{a-1}{2} \arctan x \right) \arctan x + \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + k$$

où  $k$  est une constante réelle quelconque.