

Déterminer :

$$\int e^{\arcsin x} dx$$

Analyse

Dans cet exercice, c'est l'argument de l'exponentiel qui... gêne ! Un changement de variable simple permet, dans un premier temps, de simplifier rapidement le calcul.

Résolution

Remarque : nous ne ferons apparaître la constante d'intégration qu'à la fin du calcul.

On cherche les primitives sur un intervalle I inclus dans $[-1; 1]$, la fonction $x \mapsto e^{\arcsin x}$ étant définie et continue sur un tel intervalle.

Effectuons le changement de variable (qui est de classe \mathcal{C}^1 de $\arcsin(I) \subset \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ dans l'intervalle I) :

$$\varphi : u \mapsto \varphi(u) = x = \sin u$$

On a alors $\varphi'(u) = \cos u$, $\arcsin(\sin u) = u$ et $\int e^{\arcsin x} dx = \int \cos u e^u du$.

Comme $\cos u = \operatorname{Re}(e^{iu})$, il vient :

$$\int \cos u e^u du = \int \operatorname{Re}(e^{iu}) e^u du = \operatorname{Re}\left(\int e^{iu} e^u du\right) = \operatorname{Re}\left(\int e^{(i+1)u} du\right)$$

Or :

$$\begin{aligned} \int e^{(i+1)u} du &= \frac{1}{1+i} e^{(i+1)u} = \frac{1-i}{2} (\cos u + i \sin u) e^u \\ &= \left[\frac{1}{2} (\cos u + \sin u) e^u \right] + i \left[\frac{1}{2} (-\cos u + \sin u) e^u \right] \end{aligned}$$

D'où : $\int \cos u e^u du = \operatorname{Re}\left(\int e^{(i+1)u} du\right) = \frac{1}{2} (\cos u + \sin u) e^u$.

C'est-à-dire en revenant à la variable x :

$$\int \cos u e^u du = \frac{1}{2}(\cos u + \sin u) e^u = \frac{1}{2}(\sqrt{1-x^2} + x) e^{\arcsin x}$$

Finalement :

$$\int e^{\arcsin x} dx = \frac{1}{2}(\sqrt{1-x^2} + x) e^{\arcsin x} + k$$

où k est une constante réelle quelconque.

Résultat final

$$\int e^{\arcsin x} dx = \frac{1}{2}(\sqrt{1-x^2} + x) e^{\arcsin x} + k$$

où k est une constante réelle quelconque.