

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x + \ln|e^x - 1|$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de la fonction f .
2. Montrer que \mathcal{C}_f admet trois asymptotes : une asymptote verticale et deux asymptotes obliques d'équations $y = x$ et $y = 2x$ (on précisera la position de \mathcal{C}_f par rapport à ces deux asymptotes).
3. Etudier les variations de la fonction f (on montrera, en particulier, que sur \mathbb{R}_- la fonction f admet un maximum global pour $x = \alpha$ et que l'on a : $f(\alpha) = 2\alpha$).
4. Donner, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ suivant les valeurs du réel k . Résoudre l'équation $f(x) = 0$: on note β son unique solution.
5. On note A le point de \mathcal{C}_f d'abscisse β . Déterminer l'équation réduite de la tangente T à \mathcal{C}_f au point A.
6. Tracer les trois asymptotes, T et \mathcal{C}_f .

Analyse

Le logarithme népérien et l'exponentielle au programme ! Une étude variée qui passe en revue de nombreuses notions du programme de Terminale. La présence de la valeur absolue ne pose pas de difficulté insurmontable ...

Résolution

Question 1.

$f(x)$ existe si, et seulement si, on a : $e^x - 1 \neq 0$ (l'argument du logarithme népérien est positif du fait de la valeur absolue). Or, on a immédiatement : $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
On en déduit finalement :

$$\mathcal{E}_f = \mathbb{R}^*$$

Remarque : l'analyse précédente nous donne aussi :

- $x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow |e^x - 1| = e^x - 1 \Leftrightarrow f(x) = x + \ln(e^x - 1)$.
- $x < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow |e^x - 1| = 1 - e^x \Leftrightarrow f(x) = x + \ln(1 - e^x)$.

Question 2.

On a d'abord la limite classique : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. D'où : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1$ et, par composition :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln |e^x - 1| = 0.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, il vient immédiatement (somme) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Mais on a aussi : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln |e^x - 1| = 0$, égalité qui permet d'affirmer que la courbe représentative \mathcal{E}_f de la fonction f admet en $-\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x$.

On a l'autre limite classique : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty$ et, par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln |e^x - 1| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - 1) = +\infty.$$

Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\ln(e^x - 1) = \ln \left[e^x \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) \right] = \ln e^x + \ln \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) = x + \ln \left(1 - \frac{1}{e^x} \right)$$

Et, de fait : $f(x) = x + \ln \left(1 - \frac{1}{e^x} \right)$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, il vient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) = 1$ et, par composition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) = 0$.

On a alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) = 0$, égalité qui nous permet de conclure que la courbe représentative \mathcal{E}_f de la fonction f admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x$.

Enfin, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$ d'où $\lim_{x \rightarrow 0} |e^x - 1| = 0^+$.

Il vient alors, par composition : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln |e^x - 1| = -\infty$ puis $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$. On en déduit immédiatement que la courbe représentative \mathcal{E}_f de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Conclusion générale :

La courbe représentative \mathcal{E}_f de la fonction f admet :

- Une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
- Une asymptote oblique d'équation $y = x$ en $-\infty$.
- Une asymptote oblique d'équation $y = 2x$ en $+\infty$.

Question 3.

Sur tout intervalle I où une fonction u est dérivable et ne s'annule pas, on a : $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$.

On a donc, pour tout x non nul :

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 + e^x}{e^x - 1} = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$$

On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2e^x - 1}{e^x - 1} = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$.

On a alors :

- $x < -\ln 2 \Rightarrow 2e^x - 1 < 0$.
- $x > -\ln 2 \Rightarrow 2e^x - 1 > 0$.

Enfin, on a classiquement : $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

On en tire le tableau de signe :

x		$-\ln 2$		0	
$2e^x - 1$	$-$	0	$+$		$+$
$e^x - 1$	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$ $	$+$

Finalemment :

La fonction f est :

- Strictement croissante sur les intervalles $]-\infty; -\ln 2]$ et $]0; +\infty[$.
- Strictement décroissante sur l'intervalle $[-\ln 2; 0[$.

Sur \mathbb{R}_-^* , on peut donc conclure que la fonction f admet un maximum global pour $\alpha = -\ln 2$.

On a :

$$f(-\ln 2) = -\ln 2 + \ln |e^{-\ln 2} - 1| = -\ln 2 + \ln \left| \frac{1}{2} - 1 \right| = -\ln 2 + \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 - \ln 2 = -2 \ln 2$$

On a bien $f(\alpha) = 2\alpha$. On constate ainsi que la courbe représentative \mathcal{E}_f passe par le point de coordonnées $(-\ln 2; -2 \ln 2)$ qui appartient à l'asymptote d'équation $y = 2x$.

Question 4.

Notons dans un premier temps que la fonction f , dérivable sur \mathbb{R}_-^* et \mathbb{R}_+^* , y est donc continue.

Sur l'intervalle $]-\infty; -\ln 2]$, la fonction f est continue et strictement croissante.

Par ailleurs, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $f(-\ln 2) = -2 \ln 2$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors de conclure que sur l'intervalle $]-\infty; -\ln 2]$:

- Si $k \in]-\infty; -2 \ln 2]$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique.
- Si $k > -2 \ln 2$ l'équation $f(x) = k$ n'admet pas de solution.

Sur l'intervalle $[-\ln 2; 0[$, la fonction f est continue et strictement décroissante.

Par ailleurs, on a : $f(-\ln 2) = -2 \ln 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors de conclure que sur l'intervalle $[-\ln 2; 0[$:

- Si $k \in]-\infty; -2\ln 2]$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique.
- Si $k > -2\ln 2$ l'équation $f(x) = k$ n'admet pas de solution.

Enfin, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante.

Par ailleurs, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors de conclure que pour tout réel k , l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Les éléments précédents nous permettent alors de conclure :

- Si $k < -2\ln 2$, l'équation $f(x) = k$ admet **trois** solutions (une dans chacun des intervalles $]-\infty; -\ln 2[$, $]-\ln 2; 0[$ et $]0; +\infty[$) ;
- Si $k = -2\ln 2$, l'équation $f(x) = k$ admet **deux** solutions ($-\ln 2$ et une deuxième solution dans l'intervalle $]0; +\infty[$) ;
- Si $k > -2\ln 2$, l'équation $f(x) = k$ admet **une** unique solution (appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$).

D'après l'étude précédente, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique, strictement positive.

Pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln|e^x - 1| = \ln(e^x - 1)$ et il vient :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow x + \ln(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = -x \\ &\Leftrightarrow e^x - 1 = e^{-x} \Leftrightarrow e^x - 1 = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^x(e^x - 1) = 1 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Posons alors : $X = e^x$. L'équation obtenue ci-dessus se récrit :

$$X^2 - X - 1 = 0$$

Le discriminant associé vaut : $(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5$ et les racines :

$$X_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } X_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Comme $X = e^x$, nous ne retenons que la seconde racine qui est strictement positive.

On doit donc résoudre : $e^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et il vient immédiatement : $x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Conclusion :

L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution :

$$\beta = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Question 5.

On a d'abord : $f(\beta) = f\left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) = 0$. L'équation réduite de la tangente à \mathcal{C}_f en

$A\left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right); 0\right)$ s'écrit donc :

$$y = f'(\beta) \times (x - \beta) + f(\beta) = f'(\beta) \times (x - \beta)$$

Il convient donc de déterminer $f'(\beta)$.

En tenant compte du fait que β vérifie $e^\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et que l'on a : $f'(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$, il vient :

$$f'(\beta) = \frac{2 \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{2}$$

En définitive :

L'équation réduite de la tangente au point $A\left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right); 0\right)$ s'écrit :

$$y = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{2} \times \left(x - \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\right)$$

Question 6.

On obtient :

