On considère la fonction φ définie sur $\left]1;+\infty\right[$ par :

$$\varphi(x)=2(x-1)-x\ln x$$

1. Déterminer les limites de φ en 1 à droite et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de φ.
3. Dresser le tableau de variation de φ.
4. Démontrer que φ s'annule pour une unique valeur, notée α, sur $\left]1;+\infty\right[$.
5. Démontrer que l'on a : $e<\alpha<e^2$; donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
6. Donner, sans justification, le signe de φ sur $\left]1;+\infty\right[$.

On considère maintenant la fonction f définie sur $\left]1;+\infty\right[$ par :

$$f(x)=x^{\frac{3}{\sqrt{x-1}}}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

7. Déterminer la limite de f en 1 à droite (faire apparaître le rapport $\dfrac{\ln x-\ln 1}{x-1}$ …) et donner une interprétation graphique du résultat obtenu.
8. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (factoriser par x et changer de variable) et préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'asymptote T.
9. Montrer que pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a :

$$f'(x)=\frac{3}{2}\times\frac{\varphi(x)}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}\times x^{\frac{3}{\sqrt{x-1}}-1}$$

10. Déduire des questions 6 et 8 le sens de variation de la fonction f sur $\left]1;+\infty\right[$.

11. Montrer que : $f(\alpha)=e^{\frac{6\sqrt{\alpha-1}}{\alpha}}$.

12. Tracer T et $\mathscr{C}_f$.

Analyse

Le logarithme népérien et l'exponentielle au programme ! Une étude variée qui passe en revue de nombreuses notions du programme de Terminale. La présence de la valeur absolue ne pose pas de difficulté insurmontable …

Résolution

Question 1.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left[2(x-1)\right]=2\times 0=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x\ln x)=1\times 0=0$, il vient (différence) :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\varphi(x)=0$$

On a également : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, on a (produit) : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x)=+\infty$.

Nous avons donc ici affaire à une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ».

On a, x étant non nul sur l'intervalle $\left]1;+\infty\right[$:

$$\varphi(x)=x\left(2\frac{x-1}{x}-\ln x\right)$$

Or, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\frac{x-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\frac{x}{x}\right)=2$.

On en déduit (différence) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\frac{x-1}{x}-\ln x\right)=-\infty$ puis (produit) :

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=-\infty$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \varphi(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty}$$

Question 2.

La fonction $x \mapsto 2(x-1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et à fortiori sur $]1\,;+\infty[$, en tant que fonction polynôme.

La fonction $x \mapsto x\ln x$ est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (la fonction identité et la fonction logarithme népérien, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc sur $]1\,;+\infty[$).

La fonction φ est donc dérivable sur $]1\,;+\infty[$ comme différence deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

Pour tout réel x de l'intervalle $]1\,;+\infty[$, on a alors :

$$\varphi'(x) = 2 - 1\times\ln x - x\times\frac{1}{x} = 1 - \ln x$$

On a alors, en tenant compte de $\ln e = 1$ et du fait que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

- $\forall x \in]1\,;e[,\ \varphi'(x) > 0$.
- $\varphi'(e) = 0$.
- $\forall x \in]e\,;+\infty[,\ \varphi'(x) < 0$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est strictement croissante sur }]1\,;e] \text{ et strictement décroissante sur } [e\,;+\infty[.}$$

Question 3.

Pour pouvoir dresser le tableau de variation de la fonction φ , il nous reste à évaluer : $\varphi(e)$.

On a : $\varphi(e) = 2(e-1) - e\ln e = 2e - 2 - e = e - 2$.

On a alors :

x	1		e		$+\infty$
$\varphi'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
φ			$e-2$		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Question 4.

La fonction φ est continue (comme fonction dérivable) et strictement croissante (c.f. la question précédente) sur l'intervalle $\left]1\,;e\right]$.

Par ailleurs, on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \varphi(x) = 0$ et $\varphi(e) = e-2$.

On en déduit : $\forall x \in \left]1\,;e\right],\ \varphi(x) \in \left]0\,;e-2\right]$.

La fonction φ ne s'annule donc pas sur l'intervalle $\left]1\,;e\right]$.

La fonction φ est continue (c.f. ci-dessus fonction dérivable) et strictement décroissante (c.f. la question précédente) sur l'intervalle $\left[e\,;+\infty\right[$.

Par ailleurs, on a : $\varphi(e) = e-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$.

Or, $0 \in \left]-\infty\,;e-2\right]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors de conclure que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]e\,;+\infty\right[$.

Conclusion :

La fonction φ s'annule pour une unique valeur α dans l'intervalle $\left]e\,;+\infty\right[$.

Question 5.

A la question 3. on a calculé : $\varphi(e) = e-2 > 0$.

Par ailleurs, on a : $\varphi(e^2) = 2(e^2-1) - e^2 \ln e^2 = 2e^2 - 2 - 2e^2 = -2 < 0$.

On a donc : $\varphi(e) > 0 > \varphi(e^2)$, soit : $\varphi(e) > \varphi(\alpha) > \varphi(e^2)$.

Or, la fonction φ est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[e\,;+\infty\right[$.

On en déduit alors : $e < \alpha < e^2$.

$$e < \alpha < e^2$$

En tabulant la fonction φ à partir de 3 avec un pas de 1, on obtient : $\varphi(4) > 0$ et $\varphi(5) < 0$.
D'où : $4 < \alpha < 5$.
En tabulant alors la fonction φ à partir de 4 avec un pas de 0,1, on obtient : $\varphi(4{,}9) > 0$ et $\varphi(5) < 0$. D'où : $4{,}9 < \alpha < 5$.
En tabulant enfin la fonction φ à partir de 4,9 avec un pas de 0,01, on obtient : $\varphi(4{,}92) > 0$ et $\varphi(4{,}93) < 0$. D'où : $4{,}92 < \alpha < 4{,}93$.

$$\boxed{4{,}92 < \alpha < 4{,}93}$$

Question 6.

x	1		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$	0	$-$	

Question 7.

Pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a :

$$f(x) = x^{\frac{3}{\sqrt{x-1}}} = \exp\left(\frac{3\ln x}{\sqrt{x-1}}\right) = \exp\left(3\frac{\ln x}{x-1}\sqrt{x-1}\right) = \exp\left(3\frac{\ln x - \ln 1}{x-1}\sqrt{x-1}\right)$$

Or on a : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\sqrt{x-1} = 0$.

D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(3\dfrac{\ln x - \ln 1}{x-1}\sqrt{x-1}\right) = 0$ et finalement (composition) : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\exp\left(\dfrac{3\ln x}{\sqrt{x-1}}\right) = 1$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = 1}$$

Graphiquement :

$$\boxed{\text{La courbe représentative } \mathscr{C}_f \text{ de la fonction } f \text{ admet un point limite de coordonnées } (1\,;1).}$$

Question 8.

On a, x étant non nul sur l'intervalle $]1;+\infty[$:

$$f(x)=x^{\frac{3}{\sqrt{x-1}}}=\exp\left(\frac{3\ln x}{\sqrt{x-1}}\right)=\exp\left(\frac{3\ln x}{\sqrt{x}\times\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\right)=\exp\left(\frac{3\ln\left(\sqrt{x}^{2}\right)}{\sqrt{x}\times\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\right)=\exp\left(6\times\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\right)$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et (croissance comparée) : $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$.

On en déduit (composition) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$.

Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$. Donc (composition) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=1$.

On en déduit alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6\times\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\right)=0$ et finalement (composition) :

$$\lim_{x\to+\infty}\exp\left(6\times\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\right)=1.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=1}$$

Graphiquement, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet en $+\infty$ une asymptote horizontale T d'équation $y=1$. Pour préciser leur position respective, nous étudions le signe de la différence : $f(x)-1$.

Pour tout x réel de l'intervalle $]1;+\infty[$, on a : $f(x)-1=x^{\frac{3}{\sqrt{x-1}}}-1=\exp\left(\frac{3\ln x}{\sqrt{x-1}}\right)-1$.

Comme x est strictement supérieur à 1, nous avons $\frac{3\ln x}{\sqrt{x-1}}>0$ et $\exp\left(\frac{3\ln x}{\sqrt{x-1}}\right)>1$.

On en déduit finalement que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de T.

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet en $+\infty$ une asymptote horizontale T d'équation $y=1$ et est située au-dessus de T.

Question 9.

La fonction $x \mapsto \dfrac{3\ln x}{\sqrt{x-1}}$ est dérivable sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ comme rapport de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. La fonction exponentielle étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit finalement que la fonction *f* est dérivable sur $]1\,;+\infty[$.

Pour tout réel *x* strictement supérieur à 1, la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{3\ln x}{\sqrt{x-1}} = 3\ln x(x-1)^{-\frac{1}{2}}$

est la fonction :

$$x \mapsto 3\frac{1}{x}(x-1)^{-\frac{1}{2}} + 3\ln x\left(-\frac{1}{2}\right)(x-1)^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{3}{x(x-1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3\ln x}{2(x-1)^{\frac{3}{2}}} = 3\frac{2(x-1)-x\ln x}{2x(x-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2}\frac{\varphi(x)}{x(x-1)^{\frac{3}{2}}}$$

Il vient alors :

$$f'(x) = \frac{3}{2}\frac{\varphi(x)}{x(x-1)^{\frac{3}{2}}} \times \exp\left(\frac{3\ln x}{\sqrt{x-1}}\right) = \frac{3}{2}\frac{\varphi(x)}{x(x-1)^{\frac{3}{2}}} \times x^{\frac{3}{\sqrt{x-1}}} = \frac{3}{2}\frac{\varphi(x)}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} \times x^{\frac{3}{\sqrt{x-1}}-1}$$

$$\boxed{\forall x \in]1\,;+\infty[,\ f'(x) = \frac{3}{2}\frac{\varphi(x)}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} \times x^{\frac{3}{\sqrt{x-1}}-1}}$$

Question 10.

Pour tout réel *x* strictement supérieur à 1, on a : $(x-1)^{\frac{3}{2}} > 0$ et $x^{\frac{3}{\sqrt{x-1}}-1} > 0$. On déduit alors de la question précédente que le signe de $f'(x)$ est identique à celui de $\varphi(x)$.

La question 6 nous permet alors de conclure :

- Si $x \in]1\,;\alpha[$, on a : $\varphi(x) > 0$ et donc $f'(x) > 0$.
- $\varphi(\alpha) = f(\alpha) = 0$.
- Si $x \in]\alpha\,;+\infty[$, on a : $\varphi(x) < 0$ et donc $f'(x) < 0$.

Finalement :

La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $]1\,;\alpha]$
et strictement décroissante sur l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$.

Question 11.

On a : $f(\alpha)=\exp\dfrac{3\ln\alpha}{\sqrt{\alpha-1}}$.

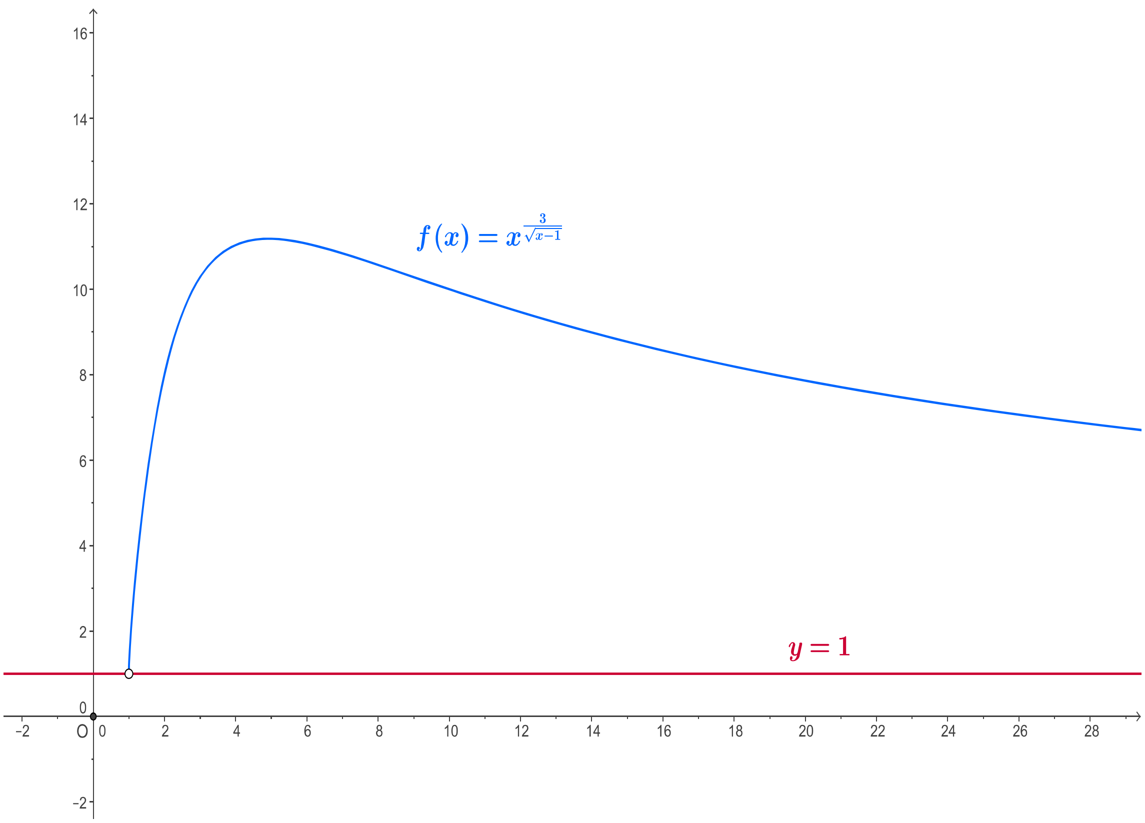
Or, $\varphi(\alpha)=0$ équivaut à : $2(\alpha-1)-\alpha\ln\alpha=0$.

Il vient alors : $\ln\alpha=\dfrac{2(\alpha-1)}{\alpha}$ et donc : $\dfrac{\ln\alpha}{\sqrt{\alpha-1}}=\dfrac{2\sqrt{\alpha-1}}{\alpha}$.

Ainsi : $f(\alpha)=\exp\dfrac{3\ln\alpha}{\sqrt{\alpha-1}}=\exp\left(3\times\dfrac{2\sqrt{\alpha-1}}{\alpha}\right)=\exp\left(\dfrac{6\sqrt{\alpha-1}}{\alpha}\right)=e^{\frac{6\sqrt{\alpha-1}}{\alpha}}$.

$$\boxed{f(\alpha)=\exp\left(\frac{6\sqrt{\alpha-1}}{\alpha}\right)=e^{\frac{6\sqrt{\alpha-1}}{\alpha}}}$$

Question 12.



Représentation graphique de la fonction $f:x\mapsto x^{\frac{3}{\sqrt{x-1}}}$ *et de l'asymptote T d'équation* $y=1$.