

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 4 cm).

Partie A

1. En remarquant que -1 est solution de l'équation $x^3 + 1 = 0$, factoriser $x^3 + 1$ et montrer que l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de la fonction f est l'intervalle :
 $] -1; +\infty[$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en -1 à droite et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = 0$. Les courbes représentatives de la fonction f et de la fonction logarithme népérien sont donc asymptotes. Préciser leur position relative en étudiant le signe de $\Delta(x) = f(x) - \ln x$ sur \mathbb{R}_+^* .

4. a. Justifier que la fonction f est dérivable sur \mathcal{D}_f .

b. Montrer que l'on a, pour tout réel x de \mathcal{D}_f :

$$f'(x) = \frac{x(x^3 + 3x - 2)}{(x^3 + 1)(x^2 + 1)}$$

c. Etudier les variations de la fonction $g : x \mapsto x^3 + 3x - 2$ sur \mathcal{D}_f et montrer que g s'annule pour une unique valeur α . En donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} .

d. Dédire de la question précédente le signe de $f'(x)$ puis donner le tableau de variation de f .

5. Montrer que \mathcal{C}_f coupe l'axe des abscisses en deux points et donner pour chacun d'eux une équation de la tangente à \mathcal{C}_f .

6. En vous aidant des questions 4.d. et 5. donner le signe de f .
7. Tracer \mathcal{E}_f (on fera également apparaître les divers éléments graphiques mis en évidence dans l'étude précédente, ces éléments facilitant le tracé de \mathcal{E}_f).

Partie B

On considère maintenant la fonction φ définie par :

$$\varphi = f \circ \exp$$

1. Préciser l'ensemble de définition \mathcal{D}_φ de la fonction φ .
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$. Montrer que la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative \mathcal{C}_φ de la fonction φ . Préciser la position relative de \mathcal{C}_φ et de \mathcal{D} .
4. Etudier les variations de la fonction φ et montrer qu'elle admet un minimum global en $\beta = \ln \alpha$.

Analyse

Une fonction rationnelle, la fonction logarithme népérien et l'exponentielle au programme ! Une étude variée qui passe en revue de nombreuses notions du programme de Terminale S. L'essentiel de la première partie est l'étude du signe de la dérivée de la fonction proposée, étude qui revient à celle du signe d'une fonction polynôme du 3^{ème} degré. Dans la seconde partie, on compose l'exponentielle avec la fonction initiale. L'étude des variations ne requiert pas de dériver à nouveau ...

Résolution

Partie A

Question 1.

-1 étant solution de l'équation $x^3 + 1 = 0$, on peut factoriser $x^3 + 1$ par $x + 1$. Comme le coefficient de « x^3 » et le terme constant sont égaux à 1, cette factorisation est de la forme :

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + ax + 1)$$

Pour tout x réel, on a :

$$(x+1)(x^2+ax+1) = x^3 + ax^2 + x + x^2 + ax + 1 = x^3 + (a+1)x^2 + (a+1)x + 1$$

Par identification, on obtient immédiatement : $a+1=0$, soit : $a=-1$.

Finalement :

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

$$\text{On a : } x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \frac{x^3+1}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2+1} > 0.$$

Or, pour tout x réel, on a : $x^2 \geq 0$ et donc $x^2+1 \geq 1 > 0$.

Par ailleurs, le discriminant associé au trinôme $x^2 - x + 1$ vaut : $(-1)^4 - 4 \times 1 \times 1 = -3$. Puisqu'il est strictement négatif, le trinôme $x^2 - x + 1$ garde un signe constant sur \mathbb{R} , celui du coefficient de « x^2 », qui vaut 1. On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$.

En définitive, on a :

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \frac{x^3+1}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

$$\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$$

Question 2.

On a immédiatement d'après ce qui précède : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{x^3+1}{x^2+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2+1} = 0^+$.

Par ailleurs : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$.

Par composition, il vient alors : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \ln \frac{x^3+1}{x^2+1} = -\infty$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$$

La courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation :
 $x = -1$.

Question 3.a.

On a cette fois : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

Par composition, il vient alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Question 3.b.

Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f(x) - \ln x = \ln \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} - \ln x = \ln \frac{\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}}{x} = \ln \frac{x^3 + 1}{x(x^2 + 1)} = \ln \frac{x^3 + 1}{x^3 + x}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$.

Par ailleurs (continuité de la fonction \ln en 1) : $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \ln 1 = 0$.

Par composition, il vient alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x^3 + 1}{x(x^2 + 1)} = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = 0$$

Etudier le signe de $\Delta(x) = f(x) - \ln x$ sur \mathbb{R}_+^* équivaut à étudier celui de $\ln \frac{x^3 + 1}{x^3 + x}$ sur \mathbb{R}_+^* .

On a d'abord, sur \mathbb{R}_+^* : $\frac{x^3 + 1}{x^3 + x} = 1 \Leftrightarrow x^3 + 1 = x^3 + x \Leftrightarrow x = 1$.

La fonction \ln étant strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , on en tire immédiatement :

- Pour tout réel x dans $]0; 1[$, $\Delta(x) < 0$: la courbe représentative \mathcal{E}_f de la fonction f est située sous celle de la fonction \ln .
- Pour $x = 1$, $\Delta(x) = 0$: la courbe représentative \mathcal{E}_f de la fonction f coupe celle de la fonction \ln .
- Pour $x > 1$, $\Delta(x) > 0$: la courbe représentative \mathcal{E}_f de la fonction f est située au-dessus de celle de la fonction \ln .

Question 4.a.

La fonction $x \mapsto \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$ est une fonction rationnelle définie sur \mathbb{R} . Elle est donc dérivable sur tout intervalle de \mathbb{R} , en particulier sur $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$.

Par ailleurs, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{D}_f =]-1; +\infty[\Leftrightarrow \frac{x^3+1}{x^2+1} > 0$ (cf. la question 1.). La fonction $x \mapsto \frac{x^3+1}{x^2+1}$ prend des valeurs strictement positives sur $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$. Comme la fonction logarithme népérien est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , on en déduit finalement :

La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition.

Question 4.b.

La dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{x^3+1}{x^2+1}$ est la fonction définie par :

$$x \mapsto \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x(3x^3+3x-2x^3-2)}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^3+3x-2)}{(x^2+1)^2}$$

On en déduit alors, pour tout x de \mathcal{D}_f :

$$f'(x) = \frac{\frac{x(x^3+3x-2)}{(x^2+1)^2}}{\frac{x^3+1}{x^2+1}} = \frac{x(x^3+3x-2)}{(x^2+1)^2} \times \frac{x^2+1}{x^3+1} = \frac{x(x^3+3x-2)}{(x^2+1)(x^3+1)}$$

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{x(x^3+3x-2)}{(x^2+1)(x^3+1)}$$

Question 4.c.

Considérons la fonction polynôme $g : x \mapsto x^3 + 3x - 2$ définie sur \mathcal{D}_f .

g est dérivable sur \mathcal{D}_f en tant que fonction polynôme et on a immédiatement :

$$g' : x \mapsto 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$$

Pour tout x réel dans \mathcal{D}_f , on a : $x^2 \geq 0$, d'où : $3(x^2 + 1) \geq 3 > 0$. On en déduit immédiatement que la fonction g est strictement croissante sur \mathcal{D}_f .

La fonction $g : x \mapsto x^3 + 3x - 2$ est strictement croissante sur \mathcal{D}_f .

La fonction g est continue sur \mathcal{D}_f en tant que fonction polynôme.

On vient de voir qu'elle y est strictement croissante.

$$g(-1) = (-1)^3 + 3 \times (-1) - 2 = -1 - 3 - 2 = -6 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

Comme $0 \in]-6; +\infty[$, on déduit de ce qui précède, d'après le théorème de bijection, que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$.

En tabulant g avec :

- un pas de 1, on obtient : $0 < \alpha < 1$.
- Puis un pas de 10^{-1} , on obtient : $0,5 < \alpha < 0,6$.
- Puis un pas de 10^{-2} , on obtient : $0,59 < \alpha < 0,60$.

L'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$ et on a :
 $0,59 < \alpha < 0,60$

Question 4.d.

On a :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{x(x^3 + 3x - 2)}{(x^2 + 1)(x^3 + 1)} = \frac{xg(x)}{(x^2 + 1)(x^3 + 1)}$$

En tenant compte du fait que l'on a : $\forall x \in \mathcal{D}_f, x^2 + 1 > 0$ et $x^3 + 1 > 0$, le signe de $f'(x)$ sur \mathcal{D}_f est donc celui du produit : $xg(x)$.

D'après la question précédente, la fonction g est strictement croissante sur \mathcal{D}_f et s'annule pour une unique valeur α sur cet intervalle. On en déduit immédiatement :

- Si $x \in]-1; \alpha[$, on a : $g(x) < 0$.
- Si $x = \alpha$, on a : $g(x) = 0$.
- Si $x > \alpha$, on a $g(x) > 0$.

On a alors le tableau de signes :

x	-1	-	0	+	α	+	$+\infty$
$g(x)$		-		-	0	+	
$xg(x)$		+	0	-	0	+	

Les éléments obtenus aux questions précédentes nous permettent de dresser le tableau de variations de la fonction f . On doit simplement calculer $f(0)$:

$$f(0) = \ln \frac{0^3 + 1}{0^2 + 1} = \ln 1 = 0$$

x	-1	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
f	$-\infty$	0	$f(\alpha)$	$+\infty$

Question 5.

L'abscisse x d'un point d'intersection de la courbe représentative \mathcal{E}_f de la fonction f et de

l'axe des abscisses vérifie : $f(x) = 0$, c'est-à-dire : $\ln \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} = 0$.

On a :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \ln \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} = 1 \Leftrightarrow x^3 = x^2 \Leftrightarrow x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

On a vu à la question précédente que l'on avait : $f(0) = f'(0) = 0$. Au point $(0; 0)$, la courbe représentative \mathcal{E}_f de la fonction f admet donc une tangente horizontale d'équation : $y = 0$.

Par ailleurs, on a $f'(1) = \frac{1 \times (1^3 + 3 \times 1 - 2)}{(1^2 + 1)(1^3 + 1)} = \frac{2}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$. Au point $(1; 0)$, la courbe

représentative \mathcal{E}_f de la fonction f admet donc une tangente d'équation :

$$y = \frac{1}{2}(x - 1) + 0 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

La courbe représentative \mathcal{E}_f de la fonction f coupe l'axe des abscisses aux points $(0; 0)$ et $(1; 0)$. Elle y admet des tangentes ayant pour équations respectivement : $y = 0$ et $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Question 6.

D'après la question précédente, la fonction f s'annule pour $x = 0$ et $x = 1$.

Sur l'intervalle $] -1 ; 0]$, la fonction f est strictement croissante et on a donc :

$f(x) \leq f(0) = 0$. La fonction f prend des valeurs négatives sur l'intervalle $] -1 ; 0]$.

Sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$, la fonction f est strictement décroissante et on a donc :

$f(x) \leq f(0) = 0$. La fonction f prend des valeurs négatives sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$.

Sur l'intervalle $[\alpha ; 1]$, la fonction f est strictement croissante et on a donc : $f(x) \leq f(1) = 0$.

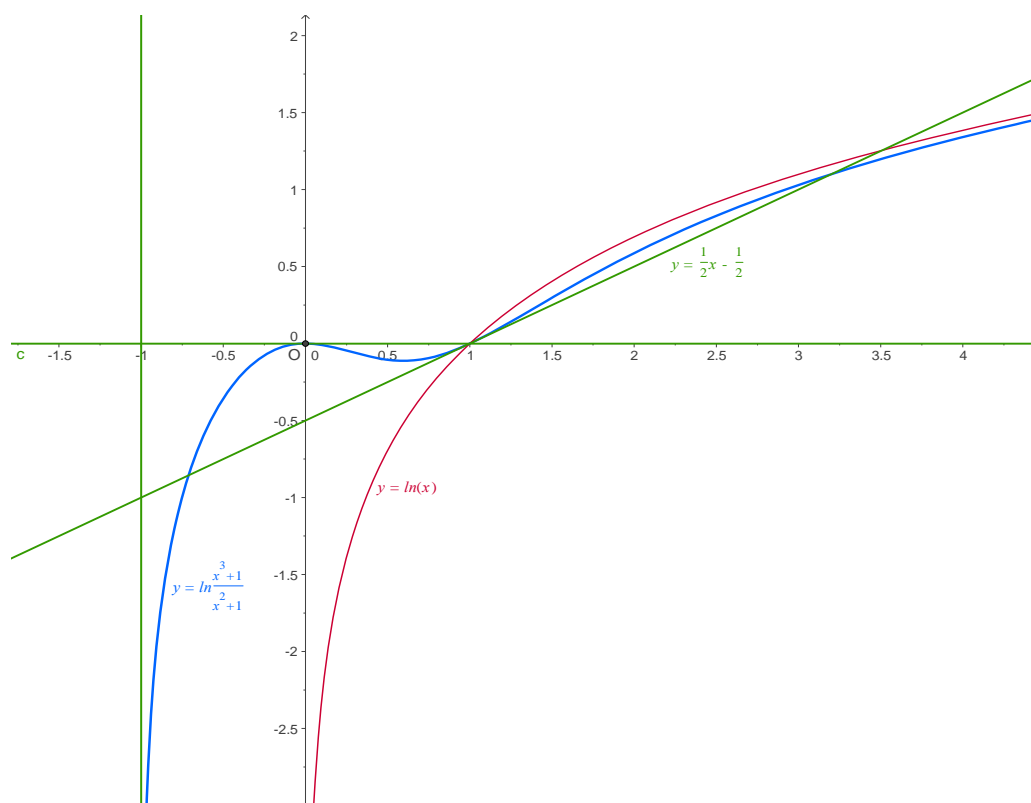
La fonction f prend des valeurs négatives sur l'intervalle $[\alpha ; 1]$.

Sur l'intervalle $[1 ; +\infty [$, la fonction f est strictement croissante et on a donc :

$f(x) \geq f(1) = 0$. La fonction f prend des valeurs positives sur l'intervalle $[\alpha ; 1]$.

- Pour tout réel x de l'ensemble $] -1 ; 1 [\setminus \{ 0 \}$, on a : $f(x) < 0$.
- Pour tout réel x dans l'intervalle $] 1 ; +\infty [$, on a : $f(x) > 0$.
- $f(0) = f(1) = 0$.

Question 7.



Partie B

Question 1.

Pour tout x réel, on a : $\exp(x) = e^x > 0$. Or, on a : $\mathbb{R}_+^* \subset]-1; +\infty[$. On en déduit que l'on peut calculer $(f \circ \exp)(x) = f(\exp(x))$ pour tout x réel.

$$\mathcal{D}_\varphi = \mathbb{R}$$

Question 2.

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et, la fonction f étant continue en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$.

On en déduit (composition) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$$

La courbe représentative \mathcal{C}_φ de la fonction φ admet une asymptote horizontale d'équation : $y = 0$.

Question 3.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On en déduit (composition) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$$

On s'intéresse maintenant à : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - x]$.

Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x) - x &= \ln \frac{(e^x)^3 + 1}{(e^x)^2 + 1} - x = \ln \frac{e^{3x} + 1}{e^{2x} + 1} - x \\ &= \ln \frac{e^{3x} (1 + e^{-3x})}{e^{2x} (1 + e^{-2x})} - x = \ln \left(e^x \frac{1 + e^{-3x}}{1 + e^{-2x}} \right) - x \\ &= \cancel{\ln e^x} + \ln \frac{1 + e^{-3x}}{1 + e^{-2x}} \cancel{-x} \\ &= \ln \frac{1 + e^{-3x}}{1 + e^{-2x}} \end{aligned}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x) = -\infty$. Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

On en déduit (composition) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = 0$ puis (somme et rapport) :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+e^{-3x}}{1+e^{-2x}} = 1$. La continuité du logarithme népérien en 1 nous donne alors :

$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \ln 1 = 0$. Finalement (composition) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+e^{-3x}}{1+e^{-2x}} = 0$$

D'où :

La droite \mathcal{D} d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative \mathcal{C}_φ de la fonction φ en $+\infty$.

Pour étudier la position relative de \mathcal{C}_φ et de \mathcal{D} , on étudie le signe de $\varphi(x) - x$ sur \mathbb{R} .

On a :

$$\begin{aligned} \varphi(x) - x &= \ln \frac{e^{3x} + 1}{e^{2x} + 1} - x = \ln \frac{e^{3x} + 1}{e^{2x} + 1} - \ln e^x \\ &= \ln \frac{e^{3x} + 1}{e^x (e^{2x} + 1)} = \ln \frac{e^{3x} + 1}{e^{3x} + e^x} \end{aligned}$$

On a : $\varphi(x) - x = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{e^{3x} + 1}{e^{3x} + e^x} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{3x} + 1}{e^{3x} + e^x} = 1 \Leftrightarrow e^{3x} + 1 = e^{3x} + e^x \Leftrightarrow 1 = e^x \Leftrightarrow x = 0$.

Puis $\varphi(x) - x > 0 \Leftrightarrow \ln \frac{e^{3x} + 1}{e^{3x} + e^x} > 0 \Leftrightarrow \frac{e^{3x} + 1}{e^{3x} + e^x} > 1 \Leftrightarrow e^{3x} + 1 > e^{3x} + e^x \Leftrightarrow 1 > e^x \Leftrightarrow x < 0$.

En définitive :

- Si x est strictement négatif, on a : $\varphi(x) - x > 0$. La courbe représentative \mathcal{C}_φ de la fonction φ est située sous la droite \mathcal{D} .
- Si x est nul, on a : $\varphi(x) - x = 0$. La courbe représentative \mathcal{C}_φ de la fonction φ coupe la droite \mathcal{D} .
- Si x est strictement positif, on a : $\varphi(x) - x < 0$. La courbe représentative \mathcal{C}_φ de la fonction φ est située au-dessus de la droite \mathcal{D} .

Question 4.

Pour étudier les variations de φ , nous pouvons en établir la dérivabilité, en calculer la dérivée et étudier le signe de cette dernière. On peut aussi s'affranchir de ce calcul et de cette étude en notant que la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} . Puisqu'elle prend des valeurs strictement positive, on note immédiatement que les variations de φ coïncideront avec

celle de f sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* . Or, d'après la question 4.d. de la partie A, nous pouvons affirmer que la fonction f est :

- strictement décroissante sur l'intervalle $]0; \alpha]$.
- strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

On se demande alors pour quelles valeurs de x on a : $\exp(x) \in]0; \alpha]$.

On a :

$$\exp(x) \in]0; \alpha] \Leftrightarrow e^x \leq \alpha \Leftrightarrow x \leq \ln \alpha$$

D'où :

La fonction φ est :

- strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; \ln \alpha]$.
- strictement croissante sur l'intervalle $[\ln \alpha; +\infty[$.

Il en découle immédiatement que la fonction φ admet un minimum global en $\beta = \ln \alpha$.

A titre de complément, nous fournissons une nouvelle figure où nous avons fait apparaître la fonction φ et l'asymptote \mathcal{D} .

