

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln(1 + 2e^x)$$

Etudier les branches infinies de la fonction f .

Analyse

Le logarithme népérien et l'exponentielle au programme ! Un « petit » exercice qui permet de fixer les idées sur la notion d'asymptote et de position relative.

Résolution

Pour tout x réel, on a : $e^x > 0$ et donc $1 + 2e^x > 1 > 0$.

On en déduit immédiatement que la fonction f est définie sur \mathbb{R} .

Étude en $-\infty$

On a classiquement : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. On en déduit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 2e^x) = 1$ puis, par composition et en tenant compte de la continuité de la fonction logarithme népérien en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + 2e^x) = \lim_{X \rightarrow 1} \ln X = \ln 1 = 0$$

On en déduit immédiatement que la courbe représentative de la fonction f admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (il s'agit de l'axe des abscisses).

Comme, pour tout x réel, on a : $1 + 2e^x > 1$, il vient (en tenant compte de la croissance stricte de la fonction logarithme népérien) : $f(x) = \ln(1 + 2e^x) > \ln 1 = 0$. Ainsi, on peut conclure que la courbe représentative de la fonction f est située partout au-dessus de son asymptote horizontale.

Etude en $+\infty$

On a classiquement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Ainsi, la somme $1 + 2e^x$ tend vers $+\infty$ du seul fait du terme $2e^x$ par lequel nous allons donc factoriser :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1 + 2e^x) = \ln\left[2e^x\left(\frac{1}{2e^x} + 1\right)\right] \\ &= \ln(2e^x) + \ln\left(1 + \frac{1}{2e^x}\right) = \ln e^x + \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2e^x}\right) \\ &= x + \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2e^x}\right) \end{aligned}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^x} = 0$ puis par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2e^x}\right) = 1$. Enfin, par composition et en tenant compte de la continuité de la fonction logarithme népérien en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2e^x}\right) = \lim_{X \rightarrow 1} \ln X = \ln 1 = 0$$

On a donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x - \ln 2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2e^x}\right) = 0$.

On en déduit immédiatement que la courbe représentative de la fonction f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x + \ln 2$.

Pour tout x réel, on a : $e^x > 0$, d'où $\frac{1}{2e^x} > 0$ et $1 + \frac{1}{2e^x} > 1$. En tenant compte de la croissance stricte de la fonction logarithme népérien, il vient : $\ln\left(1 + \frac{1}{2e^x}\right) > \ln 1 = 0$.

Pour tout réel x , on a donc : $f(x) - x - \ln 2 > 0$ et on en déduit que la courbe représentative de la fonction f est située partout au-dessus de l'asymptote oblique d'équation $y = x + \ln 2$.

Résultat final

La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + 2e^x)$ admet :

- Au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
- Au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x + \ln 2$.

La courbe représentative de la fonction f est située partout au-dessus de ses deux asymptotes.

Complément

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous une représentation graphique de la courbe représentative de la fonction f (en bleu) et de ses deux asymptotes (en vert).

