On considère la fonction *f* définie par :

$$f(x)=x^2+\frac{\ln x}{x}$$

Etudier les branches infinies de la fonction *f*.

Analyse

Une fonction simple, somme de deux fonctions bien connues ! L'étude de la branche infinie en $+\infty$ peut se faire de façon classique mais on peut (doit ?) procéder plus directement en tenant compte de $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

Résolution

La présence du logarithme népérien entraîne que la fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Etude en 0

On a : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$. On a donc (produit) : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{x}=-\infty$.

Par ailleurs : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^2=0$. On en déduit finalement (somme) : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x^2+\frac{\ln x}{x}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=-\infty$.

On en déduit ainsi que la courbe représentative de la fonction *f* admet une asymptote verticale d'équation : $x=0$.

Etude en $+\infty$

On a classiquement (croissance comparée) : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. Comme $\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, on a (somme) : $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+\frac{\ln x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Comme $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. On peut directement conclure que la courbe représentative de la fonction *f* admet pour asymptote la parabole d'équation $y=x^2$.

Si $x \in]0\,;1[$, on a : $\dfrac{\ln x}{x} < 0$ et la courbe représentative de la fonction *f* est située sous son asymptote.
Si $x > 1$, on a : $\dfrac{\ln x}{x} > 0$ et la courbe représentative de la fonction *f* est située au-dessus de son asymptote.
Pour $x = 1$, la courbe représentative de la fonction *f* coupe son asymptote.

Résultat final

La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2 + \dfrac{\ln x}{x}$ admet :

- Une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
- Au voisinage de $+\infty$ une parabole asymptote d'équation $y = x^2$.

Si $x \in]0\,;1[$ (respectivement $x > 1$ et $x = 1$), et la courbe représentative de la fonction *f* est située sous (respectivement « est située au-dessus » et « coupe ») son asymptote.

Complément

A titre de premier complément, soulignons que le théorème de la bijection peut être ici appliqué pour établir que la fonction *f* est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, la fonction *f* s'annule pour une unique valeur α de *x* qui vérifie donc $\alpha^2 + \dfrac{\ln \alpha}{\alpha} = 0$, soit : $\alpha^3 + \ln \alpha = 0$. Comme $\alpha > 0$, il vient : $\ln \alpha = -\alpha^3 < 0$ et on peut affirmer, sans le moindre calcul que l'on a : $\alpha < 1$ (cette conclusion s'impose aussi du fait que : $f(1) = 1 + \dfrac{0}{1} = 1 > 0$).

A titre de deuxième complément, remarquons que la fonction carrée est strictement convexe sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est strictement concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Quelques calculs simples nous donnent facilement : $f'(x) = 2x + \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ puis $f''(x) = \dfrac{2x^3 - 3 + 2\ln x}{x^3} = \dfrac{\varphi(x)}{x^3}$.
On montre facilement que la fonction φ s'annule pour une unique valeur $\beta \simeq 1{,}116$ et qu'elle prend des valeurs strictement négatives (respectivement « strictement positives ») pour $0 < x < \beta$ (respectivement « $x > \beta$ »). Ainsi, la fonction *f* est strictement concave sur $]0\,;\beta]$ et strictement convexe sur $[\beta\,;+\infty[$. En $x = \beta$, la courbe représentative de la fonction *f* admet un point d'inflexion et on a : $f(\beta) = \dfrac{3}{2\beta}$. On pourra même vérifier que la tangente en ce point admet pour équation : $y = \dfrac{6\beta^3 - 1}{2\beta^2}x + \dfrac{2 - 3\beta^3}{\beta}$.

A titre de dernier complément, nous fournissons ci-après une représentation graphique de la courbe représentative de la fonction *f* (en bleu), de sa parabole asymptote (en vert) et de la tangente (en noir) au point d'inflexion I.