

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 + e^x}{x + e^x}$$

Etudier les branches infinies de la fonction f .

Analyse

On commencera par donner le domaine de définition de la fonction f . Cette recherche conduit à l'utilisation du théorème de bijection et permet d'identifier une valeur interdite. L'étude aux bornes du domaine de définition permet d'identifier trois asymptotes ...

Résolution

Nous commençons par déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

Le numérateur est défini sur \mathbb{R} comme somme de deux fonctions définies sur \mathbb{R} (une fonction polynôme et la fonction exponentielle).

Pour ce qui est du dénominateur, nous devons résoudre : $x + e^x = 0$.

Posons : $\varphi(x) = x + e^x$. La fonction φ est définie sur \mathbb{R} . Elle y est également dérivable comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et on a, pour tout x réel :

$$\varphi'(x) = 1 + e^x$$

Pour tout x réel, on a : $e^x > 0$. Il vient donc : $\varphi(x) = 1 + e^x > 1 > 0$ et la fonction φ est strictement croissante sur \mathbb{R} . Elle y est dérivable et donc continue.

Enfin, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. D'où (somme) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\infty$.

Et : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. D'où (somme) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

La fonction φ définit ainsi une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On en déduit qu'il existe un unique réel α tel que $\varphi(\alpha) = \alpha + e^\alpha = 0$.

Finalement : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$.

A la calculatrice ou sur un tableur, on obtient : $\alpha \approx -0,567143$.

Etude en $-\infty$

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. On a donc (somme) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + e^x) = -\infty$.

Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. On a donc (somme) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^x) = -\infty$.

Nous avons donc affaire à une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Pour tout x réel non nul, on a :

$$f(x) = \frac{x^3 + e^x}{x + e^x} = \frac{x^3 \left(1 + \frac{e^x}{x^3}\right)}{x \left(1 + \frac{e^x}{x}\right)} = x^2 \frac{1 + \frac{e^x}{x^3}}{1 + \frac{e^x}{x}}$$

On a facilement : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{e^x}{x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{e^x}{x}\right) = 1$.

On en déduit finalement (produit) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

L'expression de $f(x)$ que nous venons d'obtenir va nous permettre de montrer que la courbe représentative de la fonction f admet pour asymptote la parabole d'équation $y = x^2$.

En effet :

$$\begin{aligned} f(x) - x^2 &= x^2 \frac{1 + \frac{e^x}{x^3}}{1 + \frac{e^x}{x}} - x^2 = x^2 \left(\frac{1 + \frac{e^x}{x^3}}{1 + \frac{e^x}{x}} - 1 \right) \\ &= x^2 \frac{1 + \frac{e^x}{x^3} - \left(1 + \frac{e^x}{x}\right)}{1 + \frac{e^x}{x}} = x^2 \frac{\frac{e^x}{x^3} - \frac{e^x}{x}}{1 + \frac{e^x}{x}} \\ &= \frac{\frac{e^x}{x} - xe^x}{1 + \frac{e^x}{x}} \end{aligned}$$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$ et (croissance comparée) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{e^x}{x}\right) = 1$, il vient finalement (rapport) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x}{x} - xe^x}{1 + \frac{e^x}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x^2) = 0$.

D'où le résultat.

Pour étudier la position de la courbe représentative de la fonction f par rapport à sa parabole asymptote, on étudie le signe de : $f(x) - x^2$.

On a :

$$f(x) - x^2 = \frac{x^3 + e^x}{x + e^x} - x^2 = \frac{x^3 + e^x - x^2(x + e^x)}{x + e^x} = e^x \frac{1 - x^2}{x + e^x} = e^x \frac{(1-x)(1+x)}{x + e^x}$$

On a facilement le tableau de signe :

	$-\infty$	-1	α	1	$+\infty$		
$1-x$	+	+	+	0	-		
$1+x$	-	0	+	+	+		
$x+e^x$	-	-	0	+	+		
$f(x)-x^2$	+	0	-		+	0	-

Ainsi, la courbe représentative de la fonction f :

- Coupe la parabole d'équation $y = x^2$ pour $x = -1$ ou 1 .
- Est située au-dessus de la parabole d'équation $y = x^2$ pour tout réel x dans $]-\infty; -1[$ ou $]\alpha; 1[$.
- Est située en dessous de la parabole d'équation $y = x^2$ pour tout réel x dans $]-1; \alpha[$ ou $]1; +\infty[$.

Etude en α

On a vu que le réel α était l'unique réel solution de l'équation : $x + e^x = 0$. On a donc simplement : $e^\alpha = -\alpha$.

Alors : $\lim_{x \rightarrow \alpha} (x^3 + e^x) = \alpha^3 + e^\alpha = \alpha^3 - \alpha = \alpha(\alpha^2 - 1)$.

On a vu qu'on avait $\alpha < 0$ et que la fonction φ était strictement croissante sur \mathbb{R} .

Or, $\varphi(-1) = -1 + e^{-1} = -1 + \frac{1}{e} < 0$. Comme $\varphi(\alpha) = 0$, on en déduit immédiatement : $-1 < \alpha$.

On a donc : $-1 < \alpha < 0$ et on en déduit : $\alpha^2 - 1 < 0$ puis $\alpha(\alpha^2 - 1) > 0$.

On a alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x < \alpha}} (x + e^x) = 0^- \text{ et donc (rapport) : } \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x < \alpha}} f(x) = -\infty.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x > \alpha}} (x + e^x) = 0^+ \text{ et donc (rapport) : } \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x > \alpha}} f(x) = +\infty.$$

La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = \alpha$.

Etude en $+\infty$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. On a donc (somme) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + e^x) = +\infty$.

Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. On a donc (somme) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x) = +\infty$.

Nous avons donc affaire à une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Pour tout x réel, on a :

$$f(x) = \frac{x^3 + e^x}{x + e^x} = \frac{e^x \left(\frac{x^3}{e^x} + 1 \right)}{e^x \left(\frac{x}{e^x} + 1 \right)} = \frac{\frac{x^3}{e^x} + 1}{\frac{x}{e^x} + 1}$$

Par croissance comparée, il vient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ puis (somme) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{e^x} + 1 \right) = 1 \text{ et enfin (rapport) : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{e^x} + 1}{\frac{x}{e^x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

La courbe représentative de la fonction f admet ainsi au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

Pour étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote, on étudie le signe de la différence : $f(x) - 1$.

On a :

$$f(x) - 1 = \frac{x^3 + e^x}{x + e^x} - 1 = \frac{x^3 + e^x - (x + e^x)}{x + e^x} = \frac{x^3 - x}{x + e^x} = \frac{x(x-1)(x+1)}{x + e^x}$$

On a facilement le tableau de signe :

	$-\infty$	-1	α	0	1	$+\infty$			
x	—	—	—	0	+	+			
$x-1$	—	—	—	—	0	+			
$x+1$	—	0	+	+	+	+			
$x + e^x$	—	—	0	+	+	+			
$f(x) - 1$	+	0	—		+	0	—	0	+

Ainsi, la courbe représentative de la fonction f :

- Coupe la droite d'équation $y = 1$ pour $x = -1, 0$ ou 1 .
- Est située au-dessus de la droite d'équation $y = 1$ pour tout réel x dans $]-\infty; -1[$, $]\alpha; 0[$ ou $]1; +\infty[$.
- Est située en dessous de la droite d'équation $y = 1$ pour tout réel x dans $]-1; \alpha[$ ou $]0; 1[$.

Résultat final

La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3 + e^x}{x + e^x}$ admet :

- Une asymptote verticale d'équation $x = \alpha$.
- Au voisinage de $-\infty$ une parabole asymptote d'équation $y = x^2$.

Si x appartient à $]-\infty; -1[$ ou $]\alpha; 1[$ (respectivement « $]-1; \alpha[$ ou $]1; +\infty[$ »), la courbe représentative de la fonction f est située au-dessus (respectivement « en dessous ») de la parabole. Elle la coupe pour $x = -1$ ou $x = 1$.

- Au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

Si x appartient à $]-\infty; -1[$, $]\alpha; 0[$ ou $]1; +\infty[$ (respectivement « $]-1; \alpha[$ ou $]0; 1[$ ») la courbe représentative de la fonction f est située au-dessus (respectivement « en dessous ») de son asymptote. Elle la coupe pour $x = -1$, 0 ou 1 .

Complément

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous une représentation graphique de la courbe représentative de la fonction f (en bleu) et de ses trois courbes asymptotes (en vert).

