

On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto x^{\frac{\ln x}{x}}$$

Etudier f .

Analyse

On commencera par donner le domaine de définition de la fonction f . Cette recherche conduit à l'utilisation du théorème de bijection et permet d'identifier une valeur interdite. L'étude aux bornes du domaine de définition permet d'identifier trois asymptotes ...

Résolution

Nous commençons par déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

Le forme générale de $f(x)$ impose $x > 0$ (expressions comportant un exposant non rationnel). L'exposant est alors parfaitement défini (le numérateur est défini pour $x > 0$ et le dénominateur est défini pour $x \neq 0$).

On a donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout réel strictement positif :

$$f(x) = x^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\ln x \times \frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{(\ln x)^2}{x}}$$

On va donc désormais étudier les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition, c'est-à-dire en 0 (à droite) et en $+\infty$.

Etude en 0^+

On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} X^2 = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{composition} \\ \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\ln x)^2 = +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \end{array} \left. \right\} \begin{array}{l} \text{multiplication} \\ \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(\ln x)^2}{x} = +\infty \end{array}$$

On en déduit que la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées).

Etude en $+\infty$

Par croissance comparée, on a immédiatement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

Redonnons les détails.

Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x^2}} = \frac{\left(\ln\left(\sqrt{x^2}\right)\right)^2}{\sqrt{x^2}} = \frac{(2\ln \sqrt{x})^2}{\sqrt{x^2}} = 4 \frac{(\ln \sqrt{x})^2}{\sqrt{x^2}} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$$

On a alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$.

Le résultat cherché en découle immédiatement.

On déduit de ce qui précède que la courbe \mathcal{E}_f représentative de la fonction f admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses).

Comme on a : $f(x) = x^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{(\ln x)^2}{x}} > 0$ du fait de l'exponentielle, on en déduit immédiatement que la courbe \mathcal{E}_f est située au-dessus de son asymptote horizontale pour tout x de \mathcal{D}_f .

La fonction f n'est clairement pas paire ou impaire puisque \mathcal{D}_f n'est pas symétrique. Aucune périodicité n'est à rechercher. On peut donc désormais étudier les variations de f .

La fonction $x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme rapport de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} . On en déduit ainsi que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Pour tout x réel strictement positif, on a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \times x - (\ln x)^2 \times 1}{x^2} \times e^{\frac{(\ln x)^2}{x}} \\ &= \frac{2 \times \ln x - (\ln x)^2}{x^2} \times e^{\frac{(\ln x)^2}{x}} \\ &= \frac{\ln x \times (2 - \ln x)}{x^2} \times e^{\frac{(\ln x)^2}{x}} \end{aligned}$$

Pour tout réel x strictement positif, on a : $e^{\frac{(\ln x)^2}{x}} > 0$ et $x^2 > 0$. On en déduit que le signe de $f'(x)$ est donné par $\ln x \times (2 - \ln x)$ qui est un polynôme du second degré factorisé en $\ln x$. Il s'annule pour $\ln x = 0$ (soit $x = 1$) et $\ln x = 2$ (soit $x = e^2$).

On en déduit immédiatement :

- Si $x \in]0; 1[$ ou $x \in]e^2; +\infty[$, $f'(x) < 0$.
- Si $x \in]1; e^2[$, $f'(x) > 0$.
- $f'(1) = f'(e^2) = 0$.

Finalement :

- La fonction f est strictement décroissante sur les intervalles $]0; 1]$ et $]e^2; +\infty[$.
- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]1; e^2[$.

On a : $f(1) = e^{\frac{(\ln 1)^2}{1}} = e^0 = 1$ et $f(e^2) = e^{\frac{(\ln e^2)^2}{e^2}} = e^{\frac{2^2}{e^2}} = e^{4e^{-2}} \approx 1,718$.

Nous regroupons les principaux résultats obtenus dans le graphique ci-dessous :

