Montrer que l'on a :

$$\int_e^x \ln(\ln(t))\,dt \underset{+\infty}{\sim} x\ln(\ln x)$$

Analyse

On peut facilement transformer l'intégrale grâce à une intégration par parties…

Résolution

Dans ce qui suit, on travaille sur l'intervalle $[e\,;+\infty]$.

On pose $u(t)=\ln(\ln(t))$ qui admet pour dérivée $u'(t)=\dfrac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}=\dfrac{1}{t\ln(t)}$.

Par ailleurs, la fonction constante qui prend la valeur 1 admet comme primitive sur l'intervalle considéré la fonction identité (par exemple). Il vient donc, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}\int_e^x \ln(\ln(t))\,dt &= \left[t\times\ln(\ln(t))\right]_e^x-\int_e^x t\times\frac{1}{t\ln(t)}\,dt\\ &= x\ln(\ln(x))-e\ln(\ln(e))-\int_e^x\frac{1}{\ln(t)}\,dt\\ &= x\ln(\ln(x))-\cancel{e\ln(1)}-\int_e^x\frac{1}{\ln(t)}\,dt\\ &= x\ln(\ln(x))-\int_e^x\frac{1}{\ln(t)}\,dt\end{aligned}$$

Pour $x>e$, on a alors : $\dfrac{\displaystyle\int_e^x \ln(\ln(t))\,dt}{x\ln(\ln(x))}=1-\dfrac{\displaystyle\int_e^x\frac{1}{\ln(t)}\,dt}{x\ln(\ln(x))}$.

Pour tout réel x dans $[e\,;+\infty]$, on a : $\ln(t)\geq\ln(e)=1$ et donc $0<\dfrac{1}{\ln(t)}\leq 1$.

On en déduit alors : $0\leq\displaystyle\int_e^x\frac{1}{\ln(t)}\,dt\leq\int_e^x 1\times dt=x-e$.

D'où : $0 \leq \dfrac{\displaystyle\int_e^x \frac{1}{\ln(t)}\,dt}{x\ln(\ln(x))} \leq \dfrac{x-e}{x\ln(\ln(x))}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, il vient (composition) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\ln(x)) = +\infty$.

On a par ailleurs (limite d'une fonction rationnelle) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-e}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1$.

Ainsi (produit) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-e}{x\ln(\ln(x))} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x-e}{x} \times \dfrac{1}{\ln(\ln(x))} \right) = 1 \times 0 = 0$.

Le théorème d'encadrement nous permet finalement de conclure : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\displaystyle\int_e^x \frac{1}{\ln(t)}\,dt}{x\ln(\ln(x))} = 0$.

Il vient alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\displaystyle\int_e^x \ln(\ln(t))\,dt}{x\ln(\ln(x))} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{\displaystyle\int_e^x \frac{1}{\ln(t)}\,dt}{x\ln(\ln(x))} \right) = 1 - 0 = 1$, c'est-à-dire :

$$\int_e^x \ln(\ln(t))\,dt \underset{+\infty}{\sim} x\ln(\ln(x))$$

Résultat final

$$\int_e^x \ln(\ln(t))\,dt \underset{+\infty}{\sim} x\ln(\ln(x))$$