Soit x un réel et n un entier naturel non nul fixé.

Montrer que l'on a :

$$\mathrm{E}(x)+\mathrm{E}(2x)+\ldots+\mathrm{E}(nx)\underset{+\infty}{\sim}\frac{n+1}{2}\mathrm{E}(nx)$$

Analyse

Il s'agit ici de montrer que l'on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{E}(x)+\mathrm{E}(2x)+\ldots+\mathrm{E}(nx)}{\mathrm{E}(nx)}=\dfrac{n+1}{2}$.

En utilisant des encadrements appropriés des parties entières, on peut facilement calculer la limite du rapport $\dfrac{\mathrm{E}(x)+\mathrm{E}(2x)+\ldots+\mathrm{E}(nx)}{\mathrm{E}(nx)}$.

Résolution

Pour tout entier naturel k dans $[\![1\,;n]\!]$, on a :

$$kx-1<\mathrm{E}(kx)\le kx$$

On a alors :

$$\sum_{k=1}^{n}(kx-1)<\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}(kx)\le\sum_{k=1}^{n}kx$$

D'où : $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}k\right)x-n<\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{E}(kx)\le\left(\sum\limits_{k=1}^{n}k\right)x$, soit : $\dfrac{n(n+1)}{2}x-n<\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{E}(kx)\le\dfrac{n(n+1)}{2}x$.

Par ailleurs : $nx-1<\mathrm{E}(nx)\le nx$. Pour tout réel $x>1$, on a alors : $\dfrac{1}{nx}\le\dfrac{1}{\mathrm{E}(nx)}<\dfrac{1}{nx-1}$.

De ce qui précède, on tire l'encadrement :

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}x-n}{nx}<\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{E}(kx)}{\mathrm{E}(nx)}<\frac{\frac{n(n+1)}{2}x}{nx-1}$$

C'est-à-dire : $\dfrac{\dfrac{n+1}{2}x-1}{x} < \dfrac{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}(kx)}{\mathrm{E}(nx)} < \dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}x}{nx-1}$.

On a alors : $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{n+1}{2}x-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{n+1}{2}x}{x}=\dfrac{n+1}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}x}{nx-1}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}x}{nx}=\dfrac{n+1}{2}$.

En définitive : $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}(kx)}{\mathrm{E}(nx)}=\dfrac{n+1}{2}$ et donc : $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}(kx)}{\dfrac{n+1}{2}\mathrm{E}(nx)}=1$, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}(kx)\underset{+\infty}{\sim}\frac{n+1}{2}\mathrm{E}(nx)$$

Le résultat est ainsi établi.

Résultat final

$$\boxed{\mathrm{E}(x)+\mathrm{E}(2x)+\ldots+\mathrm{E}(nx)\underset{+\infty}{\sim}\frac{n+1}{2}\mathrm{E}(nx)}$$