Etudier la courbe paramétrée γ définie par :

$$\gamma : t \mapsto \gamma(t) \left| \begin{array}{l} x(t) = \dfrac{t^2}{t^2 - 1} \\ y(t) = \dfrac{t}{t-1} \end{array} \right.$$

Analyse

Il s'agit d'une étude classique d'une courbe paramétrée définie en coordonnées cartésiennes.

Résolution

Ensemble de définition

Les fonctions *x* et *y* sont des fractions rationnelles dont les pôles sont aisés à déterminer.
Il vient : $D_x = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ et $D_y = \mathbb{R} - \{1\}$.
D'où :

$$\boxed{D_\gamma = D_x \cap D_y = \mathbb{R} - \{-1, 1\} =]-\infty\,; -1[\cup]-1\,; 1[\cup]1\,; +\infty[}$$

Ensemble utile

Lorsque *t* varie dans D_x, l'image de D_x par *x* est parcourue deux fois puisque l'on a :
$\forall t \in D_\gamma, x(-t) = x(t)$ (parité de la fonction $x : t \mapsto x(t)$).

En revanche, la fonction *y* est bijective de D_y dans son image.

Ainsi, pour parcourir l'intégralité de la courbe, on doit l'étudier avec *t* variant dans D_γ :

$$\boxed{D_\gamma^U = D_\gamma}$$

Ensemble d'étude

La transformation $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t}$ fait apparaître une symétrie centrale permettant de réduire l'étude de l'arc à l'ensemble $D_\gamma^E =]-1\,;0[\cup]0\,;1[$ (en toute rigueur, on doit éliminer 0 de cet ensemble puisque φ n'est pas définie pour cette valeur).

Nous allons cependant mener l'étude sur D_γ pour deux raisons :

1. D'une part, parce que l'on peut souvent « passer à côté » de ce genre de symétrie.
2. D'autre part, parce que l'étude sur D_γ va nous permettre de constater que deux branches géométriques symétriques d'un arc donné peuvent être obtenues à l'issue de démarches sensiblement différentes.

On travaille donc avec :

$$\boxed{D_\gamma^E = D_\gamma}$$

Etude aux bornes infinies

On a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} x(t) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{t^2}{t^2}\right) = 1 \text{ et } \lim_{x\to\pm\infty} y(t) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{t}{t}\right) = 1$$

On obtient donc le point asymptote : $A(1\,;1)$. Pour étudier la façon dont la courbe tend vers ce point, on va évaluer les limites suivantes : $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{y(t)-y_A}{x(t)-x_A}\right)$.

On a : $y(t)-y_A = \frac{t}{t-1} - 1 = \frac{1}{t-1}$ et $x(t)-x_A = \frac{t^2}{t^2-1} - 1 = \frac{1}{t^2-1}$

D'où : $\forall t \in D_\gamma, \frac{y(t)-y_A}{x(t)-x_A} = \frac{\frac{1}{t-1}}{\frac{1}{t^2-1}} = \frac{t^2-1}{t-1} = t-1$.

Et, finalement :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{y(t)-y_A}{x(t)-x_A}\right) = \lim_{x\to-\infty}(t-1) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{y(t)-y_A}{x(t)-x_A}\right) = \lim_{x\to+\infty}(t-1) = +\infty$$

La courbe représentative de γ admet donc une tangente verticale au point $A(1\,;1)$.

Etude en -1

On a : $\lim_{t\to -1} y(t) = \lim_{t\to -1}\left(\frac{t}{t-1}\right) = \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2}$.

Par ailleurs : $\frac{t^2}{t^2-1} = \frac{t^2}{t-1}\frac{1}{t+1}$ et $\lim_{t\to -1}\left(\frac{t^2}{t-1}\right) = -\frac{1}{2}$

D'où :

$$\lim_{t\to -1^-} x(t) = \lim_{t\to -1^-}\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right) = \lim_{t\to -1^-}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}\right) = +\infty$$

et :

$$\lim_{t\to -1^+} x(t) = \lim_{t\to -1^+}\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right) = \lim_{t\to -1^+}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}\right) = -\infty$$

La courbe représentative du graphe de γ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{1}{2}$.

Pour déterminer la position de la courbe représentative du graphe de γ par rapport à cette asymptote, formons la différence : $y(t) - \frac{1}{2}$:

$$y(t) - \frac{1}{2} = \frac{t}{t-1} - \frac{1}{2} = \frac{t+1}{2(t-1)}$$

Comme : $\lim_{t\to -1}\left(\frac{1}{2(t-1)}\right) = -\frac{1}{4}$, il vient :

$$\lim_{t\to -1^-}\left(y(t) - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}\lim_{t\to -1^-}(t+1) = 0^+ \text{ et } \lim_{t\to -1^+}\left(y(t) - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}\lim_{t\to -1^+}(t+1) = 0^-$$

On peut alors conclure :

La courbe représentative du graphe de γ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{1}{2}$. Pour x tendant vers $-\infty$ $\left(t \to -1^+\right)$, le graphe est en dessous et pour x tendant vers $+\infty$ $\left(t \to -1^-\right)$, le graphe est au-dessus.

Etude en 1

En écrivant : $x(t)=\frac{t^2}{t+1}\frac{1}{t-1}$ et comme $\lim_{t\to 1}\left(\frac{t^2}{t+1}\right)=\frac{1}{2}$, il vient :

$$\lim_{t\to 1^-} x(t)=\frac{1}{2}\lim_{t\to 1^-}\left(\frac{1}{t-1}\right)=-\infty \text{ et } \lim_{t\to 1^+} x(t)=\frac{1}{2}\lim_{t\to 1^+}\left(\frac{1}{t-1}\right)=+\infty$$

De façon analogue, on a :

$$\lim_{t\to 1^-} y(t)=\lim_{t\to 1^-}\left(\frac{1}{t-1}\right)=-\infty \text{ et } \lim_{t\to 1^+} y(t)=\lim_{t\to 1^+}\left(\frac{1}{t-1}\right)=+\infty$$

Dans ce cas, il convient d'étudier : $\lim_{t\to 1}\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)$ pour mettre en évidence l'existence d'une direction asymptotique éventuelle.

On a au voisinage de 1 et pour $t\neq 1$:

$$\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{\frac{t}{t-1}}{\frac{t^2}{t^2-1}}=\frac{t}{t-1}\frac{(t-1)(t+1)}{t^2}=\frac{t+1}{t}$$

On en tire :

$$\lim_{t\to 1}\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)=\lim_{t\to 1}\left(\frac{t+1}{t}\right)=\frac{1+1}{1}=2$$

Ce résultat établit l'existence d'une direction asymptotique de vecteur directeur : $\vec{u}\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$.

Il convient donc maintenant, d'étudier l'existence d'une asymptote éventuelle. Pour cela, nous déterminons : $\lim_{t\to 1}\big(y(t)-2x(t)\big)$.

On a au voisinage de 1 et pour $t\neq 1$:

$$y(t)-2x(t)=\frac{t}{t-1}-2\frac{t^2}{t^2-1}=\frac{t(t+1)-2t^2}{(t+1)(t-1)}=\frac{t(-t+1)}{(t+1)(t-1)}=-\frac{t(t-1)}{(t+1)(t-1)}=-\frac{t}{t+1}$$

D'où :

$$\lim_{t\to 1}\big(y(t)-2x(t)\big)=\lim_{t\to 1}\left(-\frac{t}{t+1}\right)=-\frac{1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

On en déduit que la courbe représentative du graphe de γ admet une asymptote d'équation : $y = 2x - \frac{1}{2}$.

Pour déterminer sa position par rapport à l'asymptote, nous évaluons : $\lim_{t \to 1}\left(y(t) - 2x(t) + \frac{1}{2} \right)$.

On a :

$$y(t) - 2x(t) + \frac{1}{2} = -\frac{t}{t+1} + \frac{1}{2} = \frac{-2t + (t+1)}{2(t+1)} = -\frac{t-1}{2(t+1)}$$

On en déduit :

$$\lim_{t \to 1^-}\left(y(t) - 2x(t) + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}\lim_{t \to 1^-}(t-1) = 0^+$$
$$\lim_{t \to 1^+}\left(y(t) - 2x(t) + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}\lim_{t \to 1^+}(t-1) = 0^-$$

En définitive :

La courbe représentative du graphe de γ admet une asymptote d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$.
Pour x et y tendant vers $-\infty$ $\left(t \to 1^-\right)$, le graphe est au-dessus
et pour x et y tendant vers $+\infty$ $\left(t \to 1^+\right)$, le graphe est en dessous.

Points stationnaires

On cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases}$$

On a :

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{t^2 - 1} \right) = \frac{2t\left(t^2 - 1\right) - 2t.t^2}{\left(t^2 - 1\right)^2} = \frac{-2t}{\left(t^2 - 1\right)^2}$$
$$y'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{t-1} \right) = \frac{(t-1) - t}{(t-1)^2} = \frac{-1}{(t-1)^2}$$

Les expressions de $x'(t)$ et $y'(t)$ nous fournissent de nombreuses informations :

1. $\forall t \in D_\gamma, y'(t) < 0$
   On en tire que :
   - la courbe représentative du graphe de γ n'admet pas de point stationnaire puisque $y'(t)$ ne peut s'annuler. En tout point de la courbe, le vecteur dérivé $\gamma'(t)$ fournit un vecteur directeur de la tangente.
   - *y* est une fonction strictement décroissante de *t*.

2. $x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$
   Or : $x(0) = y(0) = 0$ et $y'(t) = -1 \neq 0$ (nous le précisons bien que nous venions de voir que $y'(t)$ ne peut s'annuler).
   A l'origine, la courbe représentative du graphe de γ admet donc une tangente verticale.

La courbe représentative de γ ne comportant pas de point stationnaires, nous pouvons rechercher d'éventuels points d'inflexion. Pour cela, nous posons : $m(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ et recherchons les éventuelles valeurs de *t* qui annulent $m'(t)$.

On a :

$$\forall t \in D\gamma, m(t) = \frac{\dfrac{-1}{(t-1)^2}}{\dfrac{-2t}{(t^2-1)^2}} = \frac{\dfrac{-1}{(t-1)^2}}{\dfrac{-2t}{(t-1)^2(t+1)^2}} = \frac{(t+1)^2}{2t} = \frac{1}{2}\left(t+2+\frac{1}{t}\right)$$

D'où : $m'(t) = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{(t+1)(t-1)}{t^2}$.

On a donc : $m'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ ou $t = -1$. Mais ces deux valeurs n'appartiennent pas à D_γ. Il vient donc : $\forall t \in D_\gamma, m'(t) \neq 0$. La courbe représentative du graphe de γ n'admet donc pas de points d'inflexion.

Tableau de variation des fonctions x et y

D'après l'expression de $x'(t)$ précédemment obtenue, on a :

$$x'(t) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;0[$$
$$x'(t) < 0 \Leftrightarrow x \in]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$$

Par ailleurs, on a vu que : $\forall t \in D_\gamma, y'(t) < 0$.

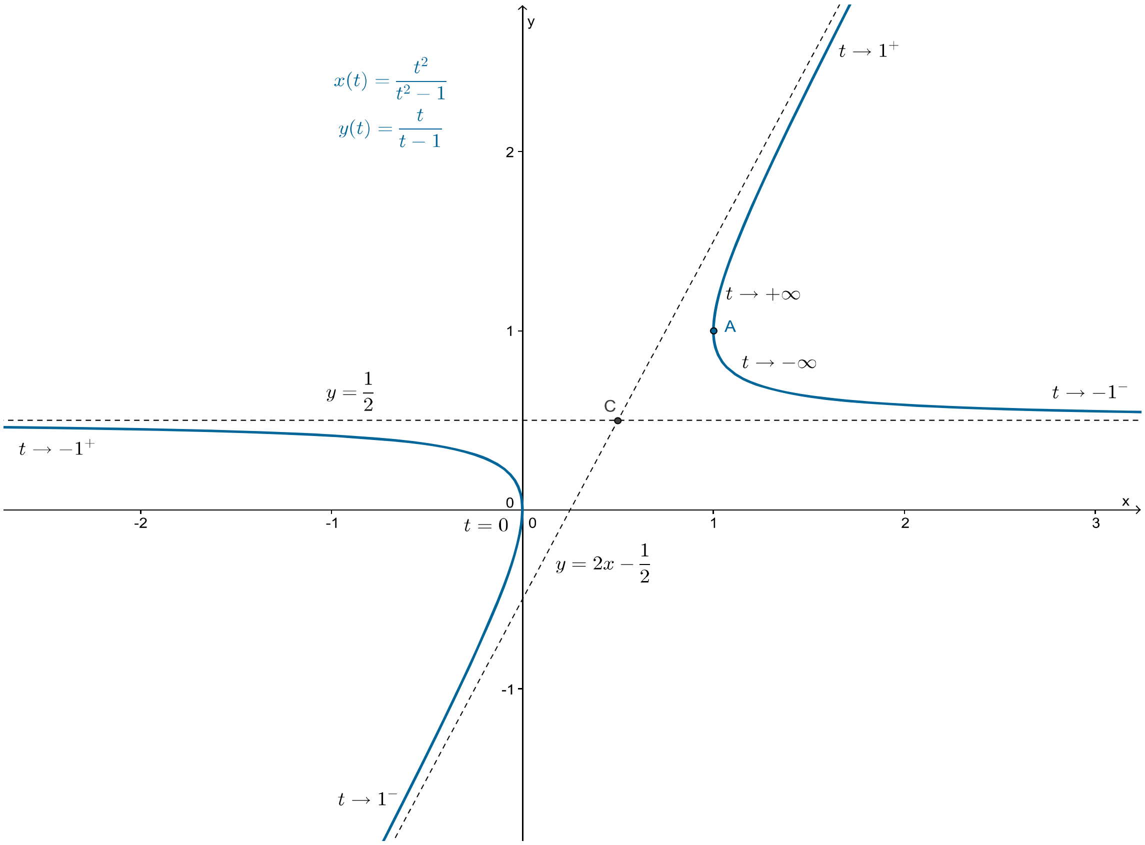
Ces signes des dérivées nous fournissent les sens de variation des fonctions *x* et *y* de la variable *t*. Nous les combinons aux différentes limites précédemment obtenues et faisons apparaître le tout dans le tableau de variation ci-dessous.

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
x	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1
y	1	↘	$\frac{1}{2}^{+}$ $\frac{1}{2}^{-}$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1
$y'(t)$		$-$		$-$		$-$	‖	$-$	

Remarque : la dernière ligne de ce tableau peut surprendre car bien que *y* soit parfaitement définie et continue pour $t = -1$ (on a $y(-1) = \frac{1}{2}$), nous avons fait apparaître les « grandeurs » $\frac{1}{2}^{-}$ et $\frac{1}{2}^{+}$ correspondant en fait aux limites de *y* lorsque l'on considère ses variations en fonction de *x* … C'est ce qui nous intéresse in fine !

Courbe représentative du graphe de γ

Nous avons fourni page suivante le tracé de la courbe représentative du graphe de γ.



Compléments

Revenons maintenant à la symétrie évoquée au début de cette étude et reprenons la transformation : $\varphi : t \to \frac{1}{t}$.

Il vient, pour $t \in D_\gamma - \{0\}$:

$$x(\varphi(t)) = x\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}-1} = \frac{1}{1-t^2} = \frac{-1}{t^2-1}.$$

D'où : $x(t) + x\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t^2}{t^2-1} + \frac{-1}{t^2-1} = 1$.

De façon analogue, on établit : $y(t) + y\left(\frac{1}{t}\right) = 1$.

Finalement, on peut écrire :

$$\forall t \in D_\gamma - \{0\} :$$
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(x(t) + x\left(\dfrac{1}{t}\right)\right) = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}\left(y(t) + y\left(\dfrac{1}{t}\right)\right) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ces relations expriment simplement le fait que le point $C\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ est le milieu des points $\gamma(t)$ et $\gamma\left(\frac{1}{t}\right)$ et ce pour toute valeur $t \in D_\gamma - \{0\}$.

φ est bijective de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ et admet deux valeurs invariantes : -1 et 1.

On a : $\varphi\left(]-1\,;0[\cup]0\,;1[\right) =]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$. La restriction de φ à $]-1\,;0[\cup]0\,;1[$ est bijective de cet ensemble dans $]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$.
En d'autres termes, et fort des relations ci-dessus, en faisant varier le paramètre *t* dans $]-1\,;0[\cup]0\,;1[$ on obtiendra une branche B_1 de l'arc puis, en effectuant une symétrie centrale de centre $C\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, on obtiendra une branche B_2 (correspondant aux variations de *t* dans $]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$)

Le point $\mathrm{O}(0\,;0)$ correspondant à la valeur $t=0$ semble « exclu » de cette approche, la fonction φ étant définie sur $\mathbb{R}^*$.
Certes ! Mais d'un point de vue purement géométrique, le symétrique de l'origine par rapport au point $C\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ n'est rien d'autre que le point de coordonnées $(1\,;1)$, c'est à dire le point asymptote obtenu lorsque l'on fait tendre *t* vers $\pm\infty$.

On peut ainsi, de façon formelle, poser « $\frac{1}{+\infty} = 0$ » et « $\frac{1}{-\infty} = 0$ ». Dans ces conditions, la symétrie géométrique complète s'exprime à travers la transformation :

$$\tilde{\varphi} : t \to \frac{1}{t} \text{ définie sur } \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$