Etudier l'arc γ définie par :

$$\gamma : t \mapsto \gamma(t) \left| \begin{array}{l} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos(3t) \end{array} \right.$$

Analyse

Il s'agit d'une étude classique d'un arc paramétré défini en coordonnées cartésiennes.

Résolution

Ensemble de définition

Les fonctions *x* et *y* sont des fonctions trigonométriques simples du paramètre *t* et sont définies sur $\mathbb{R}$.

D'où :

$$\boxed{D_\gamma = D_x \cap D_y = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}}$$

Ensemble utile

La fonction *x* est 2π périodique tandis que la fonction *y* est $\frac{2\pi}{3}$ périodique. Le support de γ (nous le noterons désormais Γ) sera donc parcouru une seule fois si l'on restreint les variations du paramètre *t* à un intervalle de longueur 2π (plus petite période multiple de 2π et $\frac{2\pi}{3}$).

On peut choisir, par exemple :

$$\boxed{D_\gamma^U = [-\pi\,;\pi]}$$

Ensemble d'étude

Pour commencer, remarquons que *x* est une fonction impaire tandis que *y* est une fonction paire. La courbe Γ sera donc symétrique par rapport à l'axe *Oy* (axe des ordonnées).

On peut ainsi réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle : $[0\,;\pi]$.

Mais on peut également remarquer que l'on a :

$$\forall t \in [0\,;\pi],\begin{cases} x(\pi - t) = \sin(\pi - t) = \sin t \\ y(\pi - t) = \cos(3\pi - 3t) = \cos(\pi - 3t) = -\cos t \end{cases}$$

Ces égalités traduisent le fait que les points $\gamma(t)$ et $\gamma(\pi - t)$ sont symétriques par rapport à l'axe Ox (axe des abscisses).

Or l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] &\to \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right] \\ t &\mapsto \pi - t \end{aligned}$$

est bijective. Nous pouvons donc restreindre l'intervalle d'étude à : $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Aucune autre symétrie ne semble pouvoir être mise en évidence :

$$D_\gamma^E = \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$$

La construction de Γ se mènera donc comme suit :

1. Etude et construction de la branche correspondant aux variations de t dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
2. Symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.
3. Symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.

Etude aux bornes du domaine d'étude

Etude en 0

On a : $x(0) = \sin(0) = 0$ et $y(0) = \cos(0) = 1$. D'où : $\gamma(0)\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$.

Par ailleurs : $x'(t) = \cos t$ et $y'(t) = -3\sin(3t)$. D'où, pour $t = 0$: $x'(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Soit, finalement : $\gamma'(0)\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$. C'est à dire : $\gamma'(0) = \vec{i}$.

En $\gamma(0)\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$, Γ admet une tangente horizontale.

Etude en $\frac{\pi}{2}$

On a : $x\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ et $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(3\frac{\pi}{2}\right)=0$. D'où : $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\Big|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$.

Par ailleurs, $x'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ et $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right)=3$.

Soit, finalement : $\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right)\Big|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}$. C'est à dire : $\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\vec{j}$.

En $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\Big|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$, Γ admet une tangente verticale.

Points stationnaires

On cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} x'(t)=0 \\ y'(t)=0 \end{cases}$$

Or on a vu plus haut que l'on avait : $x'(t)=\cos t$ et $y'(t)=-3\sin(3t)$. La seule valeur de t qui annule x' sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ est $\frac{\pi}{2}$. Le point obtenu a été étudié plus haut et n'est pas un point stationnaire ($y'(t)\neq 0$).

Tableau de variation des fonctions x et y

D'après l'expression de $x'(t)$ précédemment obtenue, on a : $\forall t\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right], x'(t)\geq 0$ et $x'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}$. Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, la fonction x est donc strictement croissante.

Par ailleurs, on a : $y'(t)=-3\sin(3t)$.

Lorsque t varie dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $3t$ varie dans $\left[0\,;\frac{3\pi}{2}\right]$. $\sin(3t)$ s'annulera donc pour $t=0$ et $t=\frac{\pi}{3}$.

On a donc :

- Pour $t \in \left]0\,;\frac{\pi}{3}\right[$, $\sin(3t) > 0$ et $y'(t) < 0$;
- Pour $t \in \left]\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(3t) < 0$ et $y'(t) > 0$;
- Pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{3}$, $y'(t) = 0$.

Pour établir un tableau de variation complet :

$$x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(3\frac{\pi}{3}\right) = \cos(\pi) = -1 \text{ et } x'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

L'étude des dérivées nous fournit les sens de variation des fonctions *x* et *y* de la variable *t*. Nous les combinons aux différents résultats précédemment obtenus et faisons apparaître le tout dans le tableau de variation ci-dessous.

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$		$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	
$y'(t)$		$-$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1
$y(t)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Points particuliers

Points où la tangente est horizontale

En l'absence de point stationnaire, ce sont les seuls points vérifiant $y'(t) = 0$.
D'après les résultats précédemment obtenus, Γ admet une tangente horizontale aux points :

$$\gamma(0)\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \text{ et } \gamma\left(\frac{\pi}{3}\right)\left|\begin{matrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\-1\end{matrix}\right.$$

Points où la tangente est verticale

Pour la même raison que précédemment, nous pouvons immédiatement conclure que le point $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ est le seul point pour lequel Γ admet une tangente verticale.

Points doubles

Nous nous plaçons sur le <u>domaine utile</u> , $[-\pi\,;\,\pi]$,et devons résoudre le système :

$$\begin{cases} t_1 \neq t_2 \\ x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases} \qquad (S)$$

On a, sur D_γ^u :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 \neq t_2 \\ \sin t_1 = \sin t_2 \\ \cos(3t_1) = \cos(3t_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 \neq t_2 \\ t_1 = \pi - t_2 + 2k\pi \\ 3t_1 = 3t_2 + 2k'\pi \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} t_1 \neq t_2 \\ t_1 = \pi - t_2 + 2k\pi \\ 3t_1 = -3t_2 + 2k'\pi \end{cases}$$

Nous n'obtenons que deux systèmes car sur D_γ^u on a : $\sin t_1 = \sin t_2 \Leftrightarrow t_1 = \pi - t_2 + 2k\pi$. L'autre possibilité, $\sin t_1 = \sin t_2 \Leftrightarrow t_1 = t_2 + 2k\pi$ ne fournit pas de solution puisque D_γ^u est un intervalle de longueur 2π .

Nous devons donc résoudre deux systèmes.

Considérons le premier système :

$$\begin{cases} t_1 \neq t_2 \\ t_1 = \pi - t_2 + 2k\pi \\ 3t_1 = 3t_2 + 2k'\pi \end{cases}$$

Il se récrit :

$$\begin{cases} t_1 \neq t_2 \\ t_1 = \pi - t_2 + 2k\pi \\ 3t_1 = 3t_2 + 2k'\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 \neq t_2 \\ t_1 + t_2 = \pi + 2k\pi \\ t_1 - t_2 = \dfrac{2k'\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k' \neq 0 \\ t_1 = \dfrac{\pi}{6}(6k + 2k' + 3) \\ t_2 = \dfrac{\pi}{6}(6k - 2k' + 3) \end{cases}$$

Les entiers k et k' variant dans $\mathbb{Z}$, on obtient des solutions pour :

→ $k=0$ et $k'=1$

On a : $t_1=\frac{5\pi}{6}$ et $t_2=\frac{\pi}{6}$ qui donnent : $x(t)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ et $y(t)=\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right)=0$.

Quant aux dérivées :

$$x'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-3\sin\left(3\frac{\pi}{6}\right)=-3$$

La pente de la tangente à Γ en $D_1\left|\begin{array}{l}\frac{1}{2}\\0\end{array}\right.$ vaut donc : $m_1=\frac{-3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-2\sqrt{3}$.

→ $k=-1$ et $k'=1$

On a : $t_1=-\frac{\pi}{6}$ et $t_2=-\frac{5\pi}{6}$ qui donnent : $x(t)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ et $y(t)=\cos\left(-\frac{3\pi}{6}\right)=0$.

Quant aux dérivées :

$$x'\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-3\sin\left(-3\frac{\pi}{6}\right)=3$$

La pente de la tangente à Γ en $D_2\left|\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\\0\end{array}\right.$ vaut donc : $m_2=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$.

On a en fait obtenu, ce qui n'est pas surprenant au regard des symétries mises en avant au début de l'étude, deux points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Considérons maintenant le second système :

$$\begin{cases} t_1\neq t_2 \\ t_1=\pi-t_2+2k\pi \\ 3t_1=-3t_2+2k'\pi \end{cases}$$

Il se récrit :

$$\begin{cases} t_1 \neq t_2 \\ t_1 = \pi - t_2 + 2k\pi \\ 3t_1 = -3t_2 + 2k'\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 \neq t_2 \\ t_1 + t_2 = \pi + 2k\pi \\ t_1 + t_2 = \dfrac{2k'\pi}{3} \end{cases}$$

Il n'admet pas de solutions car l'égalité $\pi + 2k\pi = \dfrac{2k'\pi}{3}$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}$ (elle équivaut à écrire l'égalité entre un nombre pair et un nombre impair !).

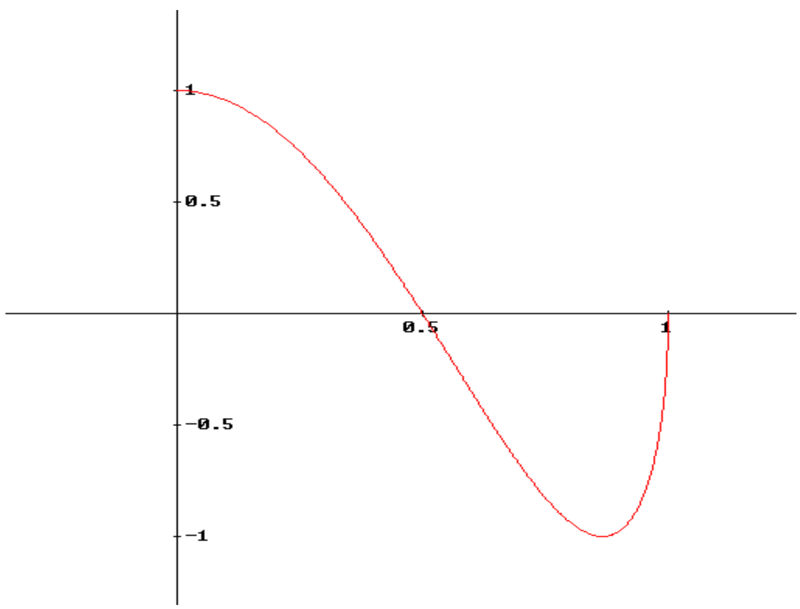
En définitive :

Le support Γ de l'arc γ admet deux points doubles : $D_1\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}\\0\end{array}\right.$ et $D_2\left|\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2}\\0\end{array}\right.$.

En ces points, les tangentes à Γ ont des pentes respectives de $m_1 = -2\sqrt{3}$ et $m_2 = 2\sqrt{3}$.

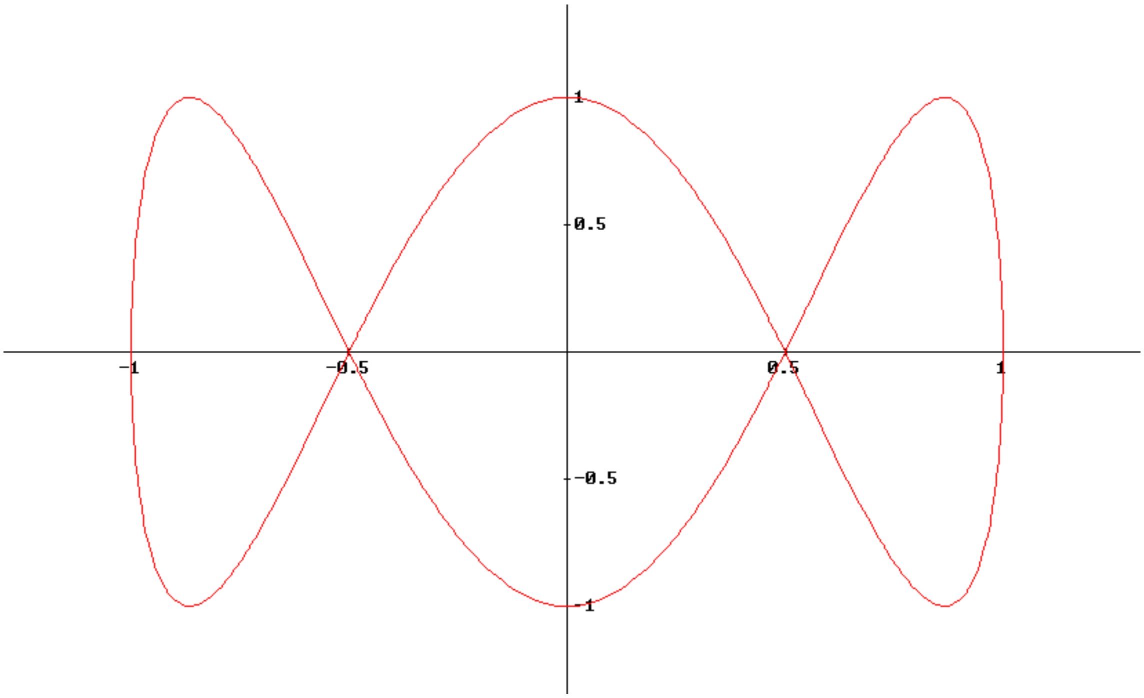
Tracé de Γ

Nous avons fourni ci-après le tracé de Γ pour $t \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ ainsi que le tracé complet.



Courbe Γ, support de l'arc :

$$\gamma(t)\left|\begin{array}{l} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos(3t) \end{array}\right. \text{ pour } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$



Courbe Γ, support de l'arc :

$$\gamma(t)\left|\begin{array}{l} x(t)=\sin t \\ y(t)=\cos(3t) \end{array}\right.$$