Etude des points stationnaires de la courbe paramétrée :

$$\gamma : t \mapsto \gamma(t) \left| \begin{array}{l} x(t) = \left(1+\cos^2 t\right)\sin t \\ y(t) = \sin^2 t \cos t \end{array} \right.$$

Analyse

Il s'agit d'une courbe paramétrée définie en coordonnées cartésiennes.
Dans ce qui suit, nous désignerons par Γ la courbe représentative du graphe de γ.
On a facilement la condition donnant $x'(t) = y'(t) = 0$. Pour déterminer la nature des points ainsi obtenus, on cherche classiquement le vecteur tangent et le premier vecteur dérivé indépendant du vecteur tangent.

Résolution

On a :

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2\sin t \cos t \times \sin t + \left(1+\cos^2 t\right)\times \cos t \\ &= \cos t\left(-2\sin^2 t + 1 + \cos^2 t\right) \\ &= \cos t\left(-2 + 2\cos^2 t + 1 + \cos^2 t\right) \\ &= \cos t\left(3\cos^2 t - 1\right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2\sin t \cos t \times \cos t + \sin^2 t \times (-\sin t) \\ &= \sin t\left(2\cos^2 t - \sin^2 t\right) \\ &= \sin t\left(2\cos^2 t - 1 + \cos^2 t\right) \\ &= \sin t\left(3\cos^2 t - 1\right) \end{aligned}$$

On résout alors :

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} x'(t)=0 \\ y'(t)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t\left(3\cos^2 t-1\right)=0 \\ \sin t\left(3\cos^2 t-1\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow 3\cos^2 t-1=0 \Leftrightarrow \cos^2 t=\frac{1}{3}$$

Combien de points stationnaires obtient-on ainsi ?

Les fonctions *x* et *y* sont $2\pi-$périodiques. On peut limiter l'étude de l'arc à l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

Ensuite, en tenant compte du fait que les fonctions sinus et cosinus sont respectivement impaire et paire, on a facilement, pour tout *t* réel :

$$\begin{cases} x(-t)=-x(t) \\ y(-t)=y(t) \end{cases}$$

On peut donc limiter l'étude de l'arc à l'intervalle $[0\,;\pi]$ (on obtiendra la branche de l'arc correspondant aux variations de *t* dans l'intervalle $[-\pi\,;0]$ en effectuant une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées).

Pour tout réel *t*, on a par ailleurs : $\sin(\pi-t)=\sin t$ et $\cos(\pi-t)=-\cos t$. Il vient alors :

$$\begin{cases} x(\pi-t)=x(t) \\ y(\pi-t)=-y(t) \end{cases}$$

On peut donc limiter l'étude de l'arc à l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ (on obtiendra la branche de l'arc correspondant aux variations de *t* dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ en effectuant une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses).

Dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\cos^2 t=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos t=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin t=\sqrt{\frac{2}{3}}$ et cette équation n'admet qu'une solution que nous notons t_0. Comme $\cos t_0=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos t_0\neq 0$ et $\sin t_0\neq 0$, le point stationnaire ainsi obtenu n'appartient pas aux axes de coordonnées. On en déduit, par symétrie, que l'arc admet un total de 4 points stationnaires. Puisque l'intégralité de la courbe est obtenue via des symétries axiales, on en déduit également que ces points sont de même nature.

Nature des points stationnaires obtenus ?

On a :

$$\begin{aligned} x''(t) &= -\sin t\left(3\cos^2 t-1\right)+\cos t\left(-6\sin t\cos t\right) \\ &= -\sin t\left(3\cos^2 t-1+6\cos^2 t\right) \\ &= -\sin t\left(9\cos^2 t-1\right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} y''(t) &= \cos t\left(3\cos^2 t-1\right)+\sin t\left(-6\sin t\cos t\right) \\ &= \cos t\left(3\cos^2 t-1-6\sin^2 t\right) \\ &= \cos t\left(3\cos^2 t-1-6+6\cos^2 t\right) \\ &= \cos t\left(9\cos^2 t-7\right) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{cases} x''(t_0) = -\sin t_0 \times\left(9\cos^2 t_0-1\right) = -\sin t_0\times\left(9\times\dfrac{1}{3}-1\right) = -2\sin t_0 \\ y''(t_0) = \cos t_0\times\left(9\cos^2 t_0-7\right) = \cos t_0\times\left(9\times\dfrac{1}{3}-7\right) = -4\cos t_0 \end{cases}$$

On a donc $\dfrac{d^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt^2}\left(-2\sin t_0\ ;-4\cos t_0\right)\neq\vec{0}$. Il s'agit du premier vecteur dérivé non nul. Puisqu'il correspond à un ordre de dérivation pair, les points stationnaires obtenus sont des points de rebroussement.

On a alors :

$$\begin{aligned} x'''(t) &= -\sin t\left(9\cos^2 t-1\right) \\ &= -\cos t\left(9\cos^2 t-1\right)-\sin t\left(-18\sin t\cos t\right) \\ &= -\cos t\left(9\cos^2 t-1-18\sin^2 t\right) \\ &= -\cos t\left(9\cos^2 t-1-18+18\cos^2 t\right) \\ &= -\cos t\left(27\cos^2 t-19\right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} y'''(t) &= \cos t\left(9\cos^2 t-7\right) \\ &= -\sin t\left(9\cos^2 t-7\right)+\cos t\left(-18\sin t\cos t\right) \\ &= -\sin t\left(9\cos^2 t-7+18\cos^2 t\right) \\ &= -\sin t\left(27\cos^2 t-7\right) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{cases} x'''(t_0) = -\cos t_0\left(27\cos^2 t_0 - 19\right) = -\cos t_0 \times \left(27\times\dfrac{1}{3} - 19\right) = 10\cos t_0 \\ y'''(t_0) = -\sin t_0\left(27\cos^2 t_0 - 7\right) = -\sin t_0 \times \left(27\times\dfrac{1}{3} - 7\right) = -2\sin t_0 \end{cases}$$

On a donc $\dfrac{d^3\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt^3}\left(10\cos t_0\,;-2\sin t_0\right) \neq \vec{0}$. Il s'agit du deuxième vecteur dérivé non nul.

On a :

$$\det\left(\frac{d^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt^2}\,;\frac{d^3\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt^3}\right) = \begin{vmatrix} -2\sin t_0 & 10\cos t_0 \\ -4\cos t_0 & -2\sin t_0 \end{vmatrix} = 4\sin^2 t_0 + 40\cos^2 t_0 = 4 + 36\cos^2 t_0 = 4 + 12 = 16$$

Les vecteurs $\dfrac{d^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt^2}$ et $\dfrac{d^3\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt^3}$ étant non colinéaires et $\dfrac{d^3\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt^3}$ correspondant à un ordre de dérivation impair, on en déduit finalement que les points de rebroussement sont des points de rebroussement de première espèce.

Coordonnées des points rebroussement

On a : $\cos t_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $\sin t_0 = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. D'où :

$$x(t_0) = \left(1+\cos^2 t_0\right)\sin t_0 = \left(1+\frac{1}{3}\right)\times\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}\times\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

$$y(t_0) = \sin^2 t_0\cos t_0 = \frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

On a donc le point $\mathrm{A}\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\,;\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$. Par symétrie, on obtient les points $\mathrm{B}\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\,;\dfrac{-2}{3\sqrt{3}}\right)$, $\mathrm{C}\left(\dfrac{-4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\,;\dfrac{-2}{3\sqrt{3}}\right)$ et $\mathrm{D}\left(\dfrac{-4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\,;\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$.

Résultat final

La courbe paramétrée γ définie par : $\gamma : t \mapsto \gamma(t)\left|\begin{array}{l} x(t) = \left(1+\cos^2 t\right)\sin t \\ y(t) = \sin^2 t\cos t \end{array}\right.$ admet quatre points de rebroussement de première espèce.

Complément

En guise de complément, nous fournissons ci-dessous une représentation graphique de Γ.