Soit la courbe paramétrée γ définie par :

$$\gamma : t \mapsto \gamma(t) \left| \begin{array}{l} x(t) = t + \dfrac{1}{t} \\ y(t) = t^2 + \dfrac{1}{t^2} \end{array} \right.$$

1. Déterminer l'équation cartésienne du support de la courbe γ.
2. Etudier les points stationnaires de la courbe γ.

Analyse

Pour ce qui est de la première question, on remarquera que les deux carrés qui apparaissent dans l'expression de $y(t)$ sont les carrés des deux termes apparaissant dans l'expression de $x(t)$ …

Pour ce qui est de la deuxième question, on procède classiquement en recherchant d'abord les valeurs du paramètre qui annulent simultanément les fonctions *x* et *y*. Ensuite, en un point stationnaire donné, on détermine les deux premiers vecteurs dérivés indépendants.

Résolution

Question 1.

Pour tout réel *t* non nul, on a : $x^2(t) = \left(t + \dfrac{1}{t}\right)^2 = t^2 + 2 \times t \times \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2} = t^2 + \dfrac{1}{t^2} + 2 = y(t) + 2$.

On a donc : $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = x^2(t) - 2$.

On en conclut immédiatement :

$$\boxed{\text{Le support de la courbe } \gamma \text{ est inclus dans la parabole d'équation } y = x^2 - 2.}$$

Question 2.

Pour tout réel *t* non nul, on a :

$$x'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2} = \frac{(t-1)(t+1)}{t^2} \text{ et } y'(t) = 2t - \frac{2}{t^3} = 2\frac{t^4 - 1}{t^3} = 2\frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^3}$$

On en déduit immédiatement :

$$x'(t)=y'(t)=0 \Leftrightarrow t=-1 \text{ ou } t=1$$

Pour $t=-1$, on a : $x(t)=x(-1)=-1+\frac{1}{-1}=-2$ et $y(t)=y(-1)=(-1)^2+\frac{1}{(-1)^2}=2$.

On a donc un premier point stationnaire : $\mathrm{A}(-2\,;2)$.

En remarquant que les fonctions *x* et *y* sont respectivement impaire et paire, on en déduit que la courbe γ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Ainsi, on a un deuxième point stationnaire : $\mathrm{B}(2\,;2)$ (on l'obtient également avec $t=1$).

Nous allons étudier la nature du point $\mathrm{B}(2\,;2)$.

Comme $x'(t)=1-\frac{1}{t^2}$, on a immédiatement $x''(t)=\frac{2}{t^3}$.

Comme $y'(t)=2t-\frac{2}{t^3}$, on a immédiatement : $y''(t)=2+\frac{6}{t^4}$.

On en déduit : $\gamma''(1)\left|\begin{matrix}2\\8\end{matrix}\right.$, ce vecteur étant un vecteur directeur de la tangente à la courbe γ au point $\mathrm{B}(2\,;2)$.

On a ensuite : $x^{(3)}(t)=\frac{-6}{t^4}$ et $y^{(3)}(t)=\frac{-24}{t^5}$.

D'où : $\gamma^{(3)}(1)\left|\begin{matrix}-6\\-24\end{matrix}\right.$.

On a $\gamma^{(3)}(1)=-3\,\gamma''(1)$. Les vecteurs $\gamma''(1)$ et $\gamma^{(3)}(1)$ étant colinéaires, nous poursuivons la dérivation.

On a : $x^{(4)}(t)=\frac{24}{t^5}$ et $y^{(4)}(t)=\frac{120}{t^6}$.

D'où : $\gamma^{(4)}(1)\left|\begin{matrix}24\\120\end{matrix}\right.$.

Les vecteurs $\gamma''(1)$ et $\gamma^{(4)}(1)$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, $\gamma^{(4)}(1)$ est le premier vecteur dérivé indépendant du vecteur tangent $\gamma''(1)$. Les ordres de dérivation de ces deux vecteurs étant pairs, on en déduit que le point B (et donc le point A) est un point de rebroussement de 2ème espèce.

La courbe γ admet deux points stationnaires : les points $\mathrm{A}(-2\,;2)$ et $\mathrm{B}(2\,;2)$. Ce sont des points de rebroussement de 2ème espèce.

L'idée de rebroussement n'est peut-être pas ici immédiate sans une étude complète de l'arc. On peut cependant sans convaincre facilement en notant que les fonctions x et y sont invariantes par le changement de variable $s=\frac{1}{t}$. Ainsi, chaque branche de la courbe est parcourue deux fois ! Par exemple, lorsque t est strictement positif, la branche correspondante est parcourue :

- Une première fois lorsque t varie entre 0 (valeur exclue) et 1 (graphiquement, on arrive en B).
- Une seconde fois lorsque t varie de 1 à « $+\infty$ » (graphiquement, on quitte B).

Complément

En guise de complément, nous fournissons ci-dessous une représentation graphique de γ. On a également fait apparaître en A et B les tangentes à la courbe γ (leurs équations réduites sont facilement obtenues à partir des vecteurs tangents $\gamma"(-1)$ et $\gamma"(1)$).