Soit a et b deux réels.
Soit la courbe paramétrée γ définie par :

$$\gamma : t \mapsto \gamma(t) \left| \begin{array}{l} x(t) = 2t + \dfrac{a}{t^2} \\ y(t) = t^2 + \dfrac{2b}{t} \end{array} \right.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la courbe γ admette un point de rebroussement.
2. Quel est le lieu des points de rebroussement obtenus ?

Analyse

Les points de rebroussement sont des points stationnaires. On amorce donc le traitement de la première question en annulant les dérivées des fonctions x et y.

Résolution

Notons, dans un premier temps que l'on a : $\mathscr{D}_x = \mathscr{D}_y = \mathbb{R}^*$.

Question 1.

Un point de rebroussement étant un point stationnaire, on annule les dérivées des fonctions x et y.

Pour tout t non nul, on a : $x'(t) = 2 - \dfrac{2a}{t^3} = 2\dfrac{t^3 - a}{t^3}$ et $y'(t) = 2t - \dfrac{2b}{t^2} = 2\dfrac{t^3 - b}{t^2}$.

Il vient alors immédiatement :

$$\gamma'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\dfrac{t^3 - a}{t^3} = 0 \\ 2\dfrac{t^3 - b}{t^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 - a = 0 \\ t^3 - b = 0 \end{cases}$$

Le système obtenu admet une solution (en t) si, et seulement si, $a = b \neq 0$. Cette solution est alors $t = a^{\frac{1}{3}}$.

La condition $a=b\neq 0$ est nécessaire et suffisante pour que la courbe admette un point stationnaire. Etudions alors la nature de ce point.

Pour $a=b\neq 0$, on a :

$$x\left(a^{\frac{1}{3}}\right)=2a^{\frac{1}{3}}+\frac{a}{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2}=2a^{\frac{1}{3}}+\frac{a}{a^{\frac{2}{3}}}=2a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}=3a^{\frac{1}{3}}$$

$$y\left(a^{\frac{1}{3}}\right)=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2+\frac{2a}{a^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{2}{3}}=3a^{\frac{2}{3}}$$

Le point stationnaire obtenu est donc le point :

$$\gamma\left(a^{\frac{1}{3}}\right)\left|\begin{array}{l}3a^{\frac{1}{3}}\\ 3a^{\frac{2}{3}}\end{array}\right.$$

Comme $x'(t)=2-\frac{2a}{t^3}$ et $y'(t)=2t-\frac{2b}{t^2}$, il vient $x''(t)=\frac{6a}{t^4}$ et $y''(t)=2+\frac{4a}{t^3}$.

D'où : $x''\left(a^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{6a}{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^4}=\frac{6}{a^{\frac{1}{3}}}$ et $y''\left(a^{\frac{1}{3}}\right)=2+\frac{4a}{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3}=2+4=6$.

$$\gamma''\left(a^{\frac{1}{3}}\right)\left|\begin{array}{l}\frac{6}{a^{\frac{1}{3}}}\\ 6\end{array}\right.$$

Comme $\gamma''\left(a^{\frac{1}{3}}\right)$ est un vecteur non nul, il s'agit d'un vecteur directeur de la tangente à la courbe γ. Le point $\gamma\left(a^{\frac{1}{3}}\right)$ est un point de rebroussement.

Finalement :

La courbe γ admet un point de rebroussement si, et seulement si, on a $a=b\neq 0$.

Le vecteur $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{6}\gamma''\left(a^{\frac{1}{3}}\right)$ de coordonnées $\left(1\,;\,a^{\frac{1}{3}}\right)$ est également un vecteur directeur de la tangente à la courbe γ en $\gamma\left(a^{\frac{1}{3}}\right)$. On en obtient facilement l'équation réduite :

$$y = a^{\frac{1}{3}}\left(x - 3a^{\frac{1}{3}}\right) + 3a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}}x - 3a^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}}x$$

On a ensuite : $x'''(t) = -\dfrac{24a}{t^5}$ et $y'''(t) = -\dfrac{12a}{t^4}$.

D'où : $x'''\left(a^{\frac{1}{3}}\right) = -\dfrac{24a}{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^5} = -\dfrac{24}{a^{\frac{2}{3}}}$ et $y'''\left(a^{\frac{1}{3}}\right) = -\dfrac{12a}{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^4} = -\dfrac{12}{a^{\frac{1}{3}}}$.

$$\gamma'''\left(a^{\frac{1}{3}}\right)\left|\begin{array}{l} -\dfrac{24}{a^{\frac{2}{3}}} \\ -\dfrac{12}{a^{\frac{1}{3}}} \end{array}\right.$$

Le vecteur $\gamma''\left(a^{\frac{1}{3}}\right)$ est colinéaire au vecteur de coordonnées $\left(1\,;\,a^{\frac{1}{3}}\right)$. Par ailleurs, le vecteur $\gamma'''\left(a^{\frac{1}{3}}\right)$ est colinéaire au vecteur $-\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{24}\gamma'''\left(a^{\frac{1}{3}}\right)$ de coordonnées $\left(1\,;\,\dfrac{1}{2}a^{\frac{1}{3}}\right)$. On en déduit immédiatement que les vecteurs $\gamma''\left(a^{\frac{1}{3}}\right)$ et $\gamma'''\left(a^{\frac{1}{3}}\right)$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi, comme l'ordre de dérivation du premier vecteur dérivé non colinéaire à $\gamma''\left(a^{\frac{1}{3}}\right)$ est impair, on conclut immédiatement que le point de rebroussement $\gamma\left(a^{\frac{1}{3}}\right)$ est un point de rebroussement de 1ère espèce.

En guise de complément on a fait apparaître, sur la figure ci-après, la courbe γ pour $a = 2$, le point de rebroussement $\gamma\left(2^{\frac{1}{3}}\right)\left|\begin{array}{l} 3\times 2^{\frac{1}{3}} \\ 3\times 2^{\frac{2}{3}} \end{array}\right.$ ainsi que la tangente d'équation $y = 2^{\frac{1}{3}}x$.

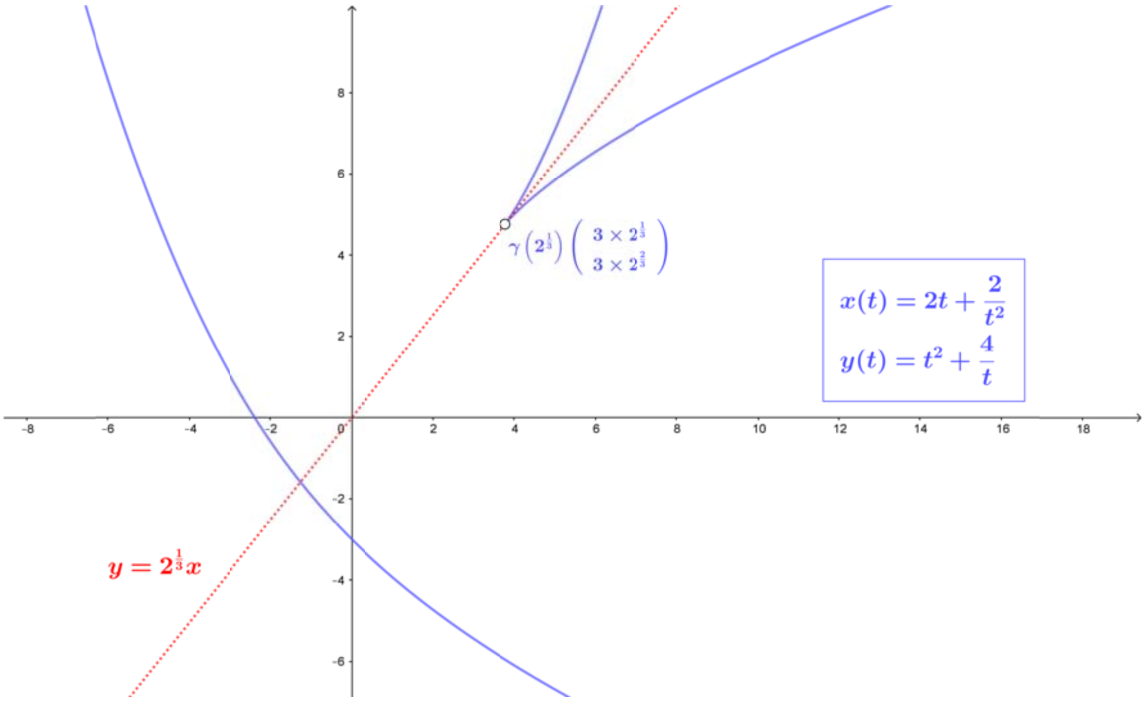

Figure 1. La courbe paramétrée $\gamma(t)\left|\begin{array}{l}2t+\dfrac{2}{t^2}\\ t^2+\dfrac{4}{t}\end{array}\right.$ *(correspondant à* $a=2$*),*

son point de rebroussement et sa tangente en ce point.

Question 2.

On a : $\gamma\left(a^{\frac{1}{3}}\right)\left|\begin{array}{l}3a^{\frac{1}{3}}\\ 3a^{\frac{2}{3}}\end{array}\right.$. D'où : $\left(x\left(a^{\frac{1}{3}}\right)\right)^2=\left(3a^{\frac{1}{3}}\right)^2=9a^{\frac{2}{3}}=3y\left(a^{\frac{1}{3}}\right)$.

Les points de rebroussements obtenus appartiennent donc à la parabole d'équation $y=\frac{1}{3}x^2$.

Le sommet $(0\,;0)$ doit en être exclu puisque l'on a $a\neq 0$.

Réciproquement, si nous nous donnons un point de coordonnées $\left(X\,;\frac{1}{3}X^2\right)$ sur la parabole, alors il est immédiat qu'il s'agit du point de rebroussement de la courbe γ de paramètre $a=X^3$.

Finalement :

L'ensemble des points de rebroussement des courbes γ
est la parabole d'équation $y=\frac{1}{3}x^2$ privée de son sommet.

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous des représentations graphiques des courbes γ pour différentes valeurs du paramètre *a*, les points de rebroussement correspondants et la parabole d'équation $y = \frac{1}{3}x^2$ (privée de son sommet).

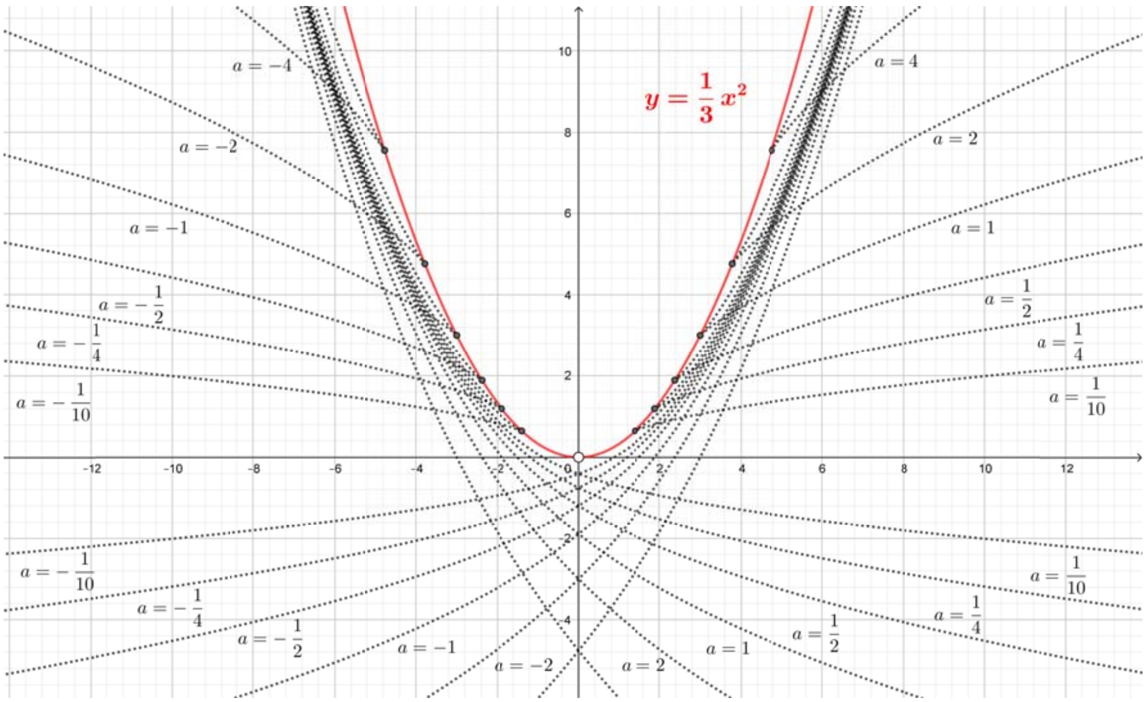

Figure 2. Représentations graphiques de diverses courbes paramétrées γ ,
de leurs points de rebroussement et de la parabole d'équation $y = \frac{1}{3}x^2$
privée de son sommet.