Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x)\,dx$$

Analyse

On peut procéder à une intégration par parties en vue d'abaisser le degré du polynôme se trouvant sous le signe somme.

Résolution

On pose donc :

- $u(x) = x^2$, qui donne $u'(x) = 2x$.
- $v'(x) = \cos(x)$ dont une primitive est $v(x) = \sin(x)$.

L'intégration par parties s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x)\,dx &= \left[u(x)v(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)\,dx \\
&= \left[x^2 \sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin(x)\,dx \\
&= \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx
\end{aligned}$$

Nous pouvons à nouveau procéder à une intégration par parties avec cette fois :

- $u(x) = x$, qui donne $u'(x) = 1$.
- $v'(x) = -\sin(x)$ dont une primitive est $v(x) = \cos(x)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)dx &= \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} + 2\left[u(x)v(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)\,dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} + 2\left[x\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2\left[\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2\end{aligned}$$

Résultat final

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)\,dx = \frac{\pi^2}{4} - 2$$