Soit *f* une fonction continue sur un segment $[a,b]$ avec $a \neq b$.
On suppose que pour toute fonction *g* en escalier sur $[a,b]$ on a :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

Montrer que *f* est la fonction nulle.

Analyse

On va supposer que la fonction *f* n'est pas la fonction nulle et aboutir à une contradiction (un bel exemple de raisonnement par l'absurde).

Résolution

Menons un raisonnement par l'absurde en supposant que la fonction *f* ne s'annule pas en un point x_0 de l'intervalle $[a,b]$.
On peut alors supposer $f(x_0) > 0$ (on raisonnerait de façon rigoureusement analogue avec $f(x_0) < 0$).

Soit : $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0)$.

La fonction *f* étant continue, il existe un réel α strictement positif tel que pour tout réel *x* appartenant à $\mathrm{I} = [a,b] \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, on a : $f(x) \in]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$, soit $f(x) \in \left]\frac{1}{2} f(x_0), \frac{3}{2} f(x_0)\right[$.

D'où : $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) > \frac{1}{2} f(x_0) > 0$.

$\mathrm{I} = [a\,,b] \cap]x_0 - \alpha\,,\, x_0 + \alpha[$ est un intervalle comme intersection de deux intervalles et sa longueur est non nulle.

On considère alors la fonction en escalier *g* définie par :

$$g : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathrm{I} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il s'agit en fait de la fonction indicatrice de I.

Dans ces conditions on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_{x\in\mathrm{I}} f(x)g(x)dx \\ &= \int_{x\in\mathrm{I}} f(x)dx \\ &> \int_{x\in\mathrm{I}} \frac{1}{2} f(x_0)dx \\ &> 0\end{aligned}$$

L'intégrale $\int_a^b f(x)g(x)dx$ ne peut être nulle, ce qui est absurde.

On en déduit qu'il ne peut exister x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$. La fonction *f* est la fonction nulle.