Calculer :

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 5} 4\frac{e^x}{e^x+4}dx$$

Analyse

On observe attentivement le dénominateur de la fraction et on reconnaît au numérateur …

Résolution

La fonction $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+4}$ est de la forme $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec u définie par : $u(x) = e^x + 4$.

Pour tout x réel, on a : $e^x + 4 > 0$, cela est à fortiori vrai sur l'intervalle $[-\ln 2; \ln 5]$.

La fonction $x \mapsto \ln(e^x + 4)$ est donc une primitive de $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+4}$ sur $[-\ln 2; \ln 5]$.

Donc $x \mapsto 4\ln(e^x + 4)$ est une primitive de $x \mapsto 4\frac{e^x}{e^x+4}$ sur $[-\ln 2; \ln 5]$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\int_{-\ln 2}^{\ln 5} 4\frac{e^x}{e^x+4}dx &= \left[4\ln(e^x+4)\right]_{-\ln 2}^{\ln 5} = 4\ln(e^{\ln 5}+4) - 4\ln(e^{-\ln 2}+4) \\ &= 4\ln(5+4) - 4\ln\left(\frac{1}{2}+4\right) = 4\ln 9 - 4\ln\frac{9}{2} = 4\ln 9 - 4(\ln 9 - \ln 2) \\ &= 4\ln 9 - 4\ln 9 + 4\ln 2 \\ &= \boxed{4\ln 2}\end{aligned}$$

Résultat final

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 5} 4\frac{e^x}{e^x+4}dx = 4\ln 2$$