

Calculer :

$$\int_6^7 \frac{3x}{\sqrt{x^2-5}} dx$$

Analyse

On observe attentivement le dénominateur de la fraction (fonction apparaissant sous le radical) et on reconnaît au numérateur ...

Résolution

La fonction polynôme $x \mapsto x^2 - 5$ admet pour dérivée la fonction $x \mapsto 2x$.

On en déduit que la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 5}$ admet pour dérivée la fonction $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$.

On en déduit que la fonction $x \mapsto \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 5}}$ admet comme primitive sur l'intervalle $[6; 7]$ la fonction $x \mapsto 3\sqrt{x^2 - 5}$.

On en tire alors :

$$\begin{aligned} \int_6^7 \frac{3x}{\sqrt{x^2-5}} dx &= \left[3\sqrt{x^2-5} \right]_6^7 \\ &= 3\sqrt{7^2-5} - 3\sqrt{6^2-5} \\ &= 3\sqrt{49-5} - 3\sqrt{36-5} \\ &= 3(\sqrt{44} - \sqrt{31}) \\ &= 3(2\sqrt{11} - \sqrt{31}) \end{aligned}$$

Résultat final

$$\int_6^7 \frac{3x}{\sqrt{x^2-5}} dx = 3(2\sqrt{11} - \sqrt{31})$$